С.И. Макаров

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Рекомендовано УМО по образованию
в области финансов, учета и мировой экономики
в качестве **учебного пособия** для студентов,
обучающихся по специальностям «Финансы и кредит»,
«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,
«Мировая экономика»

Второе издание, стереотипное

КноРус
МОСКВА
2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
М15

Рецензенты:
О.А. Репин, заведующий кафедрой «Математическая статистика» Самарской государственной экономической академии, д-р физ.-мат. наук,
М.С. Красс, проф. кафедры «Математическое моделирование экономических процессов» Финансовой академии при Правительстве РФ, д-р физ.-мат. наук

Макаров С.И.
М15 Математика для экономистов : учебное пособие / С.И. Макаров. — 2-е изд., стер. — М. : КНОРУС, 2008. — 264 с.
ISBN 978-5-390-00106-6

В учебном пособии изложены основы математического анализа, линейной алгебры, аналитической и многомерной геометрии, рядов, квадратичных форм, дифференциальных уравнений. По всем разделам приведены решения соответствующих задач, представлено большое число геометрических иллюстраций, даны экономические приложения изложенного математического аппарата и простейшие экономико-математические модели. Приложения к изданию содержат примеры решения задач и другие методические материалы.

Пособие написано в соответствии с требованиями Государственных образовательных стандартов по математике.

Предназначено для подготовки специалистов с высшим экономическим образованием и предназначено студентам экономических вузов всех форм обучения.

Сетевая версия и контрольные задания размещены на сайте университета www.sseu.ru.

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.000035.01.08 от 09.01.2008 г.

Изд. № 1030. Подписано в печать 18.02.2008.
Формат 60×90/16. Гарнитура «Times New Roman».
Печать офсетная. Бумага газетная.
Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 13,2. Тираж 3000 экз. Заказ № 2306.

ЗАО «КНОРУС». 129110, Москва, ул. Большая Переяславская, 46.
Тел.: (495) 680-7254, 680-0671, 680-1278.
E-mail: office@knorus.ru http://www.knorus.ru

Отпечатано в ОАО «Домодедовская типография».
142000, Московская обл., г. Домодедово, Каширское ш., 4/1.

ISBN 978-5-390-00106-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 12. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ПРИЛОЖЕНИЯ

Глава 1
ВВЕДЕНИЕ

1.1. Математическая символика

Логические символы:
$\forall$ — для любого, любой;
$\exists$ — существует, найдется;
: — такой, что;
$\wedge$ — и;
$\vee$ — или;
$\rceil$ — символ отрицания;
$\Rightarrow$ — следует;
$\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда или необходимо и достаточно;
$\equiv$ — тождественно равно.
Теоретико-множественные символы:
$\cup$ — объединение;
$\cap$ — пересечение;
$\setminus$ — разность;
C — дополнение;
$\subset$ — включается, входит;
$\in$ — принадлежит;
$\varnothing$ — пустое множество.

1.2. Элементы теории множеств

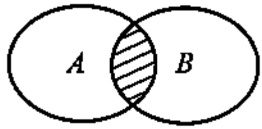
Пусть A, B, C — некоторые множества. Тогда над ними можно выполнять следующие операции.

1. Объединение множеств A и B:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

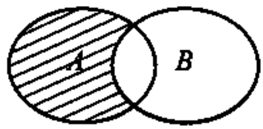
2. Пересечение множеств A и B:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$



3. Разность множеств A и B.

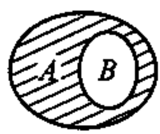
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B;$$



4. Дополнение множества В в множестве А.

$$x \in C_A B \Leftrightarrow B \subset A,\ x \in A \wedge x \notin B;$$

если $B \subset A$, то $C_A B = A \setminus B$.



1.3. Свойства операций над множествами

Пусть A, B, C — некоторые подмножества множества E. Тогда справедливы следующие свойства операций:

1) $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$ — коммутативность;

2) $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{array}\right\}$ — ассоциативность;

3) $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\}$ — дистрибутивность;

4) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ — идемпотентность;

5) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;

6) $A \cup E = E, A \cap E = A;$

7) $C_E(C_E A) = A$ — инволюция;

8) $C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B);$

9) $C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B);$

10) $A \cap (C_E A) = \varnothing;$

11) $A \cup (C_E A) = E.$

1.4. Стандартные множества

В перечень стандартных множеств входят:
$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел;
$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел;
$\boldsymbol{P}$ — множество рациональных чисел;
$\boldsymbol{Q}$ — множество иррациональных чисел;
$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{Q}$.

1.5. Абсолютная величина числа

Определение 1.1. Абсолютной величиной (модулем) действительного числа $x \in \boldsymbol{R}$ называется

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \ge 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из определения следует, что выполняются следующие свойства.

1. $|x| \ge 0.$
2. $|x| = |-x|.$
3. $-|x| \le x \le |x|.$
4. Если $a > 0$, то неравенство $|x| \le a$ равносильно неравенству

$$-a \le x \le a.$$

5. $\forall x, y \in \mathrm{R}$ $|x+y| \le |x| + |y|$ — первое неравенство треугольника.

Доказательство. По свойству 3:

$$-|x| \le x \le |x|, \quad -|y| \le y \le |y|.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|.$$

По свойству 4:

$$|x+y| \le |x|+|y|.$$

6. $\forall\, x, y \in \boldsymbol{R}$ $|x-y| \ge |x|-|y|$ — второе неравенство треугольника.

Доказательство. $x = y + (x - y)$.

По свойству 5:

$|x| = |y+(x-y)| \le |y|+|x-y|$, откуда

$$|x-y| \ge |x|-|y|.$$

1.6. Окрестность точки

Определение 1.2. ε-окрестностью точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ называется множество точек $x \in \boldsymbol{R}$, удовлетворяющих условию

$$|x-x_0| < \varepsilon.$$

Раскроем знак модуля:

$$-\varepsilon < x-x_0 < \varepsilon,$$
$$x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon,$$
$$x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon).$$

Определение 1.3. ε-окрестностью точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^2$ ($\boldsymbol{R}^3$) называется множество точек плоскости (пространства), находящихся от точки x_0 на расстоянии, не превосходящем ε.

1.7. Понятие функции

Пусть X и Y — некоторые множества.

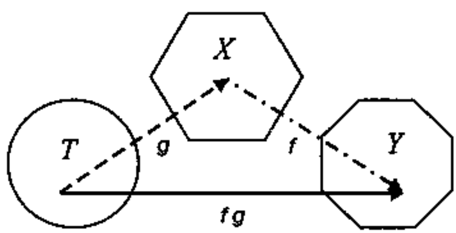
Определение 1.4. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие по некоторому правилу единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция (отображение) со значениями в множестве Y:

$$f: X \to Y, \qquad y = f(x).$$

Множество X называется областью определения функции и обозначается $Dom(f)$ или $D(f)$, множество Y называется множеством значений функции и обозначается $Im(f)$ или $I(f)$.

Определение 1.5. Если функция f переводит элемент $x \in X$ в элемент $y \in Y$, т.е. $y = f(x)$, то y называют образом элемента x, а x называют прообразом элемента y. Образ всегда единственен.

Определение 1.6. Композицией отображений $f: X \to Y$ и $g: T \to X$ называется отображение $f\,g: T \to Y$.



Если f и g — числовые функции, то их композицию называют сложной функцией:

$$y = f(x),\ x = g(t) \Rightarrow y = f(g(t)).$$

Пример 1.1. $y = x^3$, $x = \sin t \Rightarrow y = \sin^3 t$.

Определение 1.7. Если обратное соответствие, переводящее Y в X является функцией, т.е. у каждого элемента $y \in Y$ имеется единственный прообраз $x \in X$, то это соответствие называют обратным отображением, или обратной функцией.

$$f^{-1}: Y \to X, \qquad x = f^{-1}(y).$$

Обратная функция обратима, и обратная функция к обратной функции совпадает с исходной функцией $(f^{-1})^{-1} = f$.

Пример 1.2. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Выразим x: $x = \pm\sqrt{y}$.

Обратной функцией будет являться $x = +\sqrt{y}$.

Определение 1.8. Графиком числовой функции $y = f(x)$ называется совокупность точек плоскости вида $(x, f(x))$, где $x \in D(f)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов.

Определение 1.9. Числовая функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей (убывающей), если большему значению аргумента соответствуст большее (меньшее) значение функции:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ \ (\text{или}\, f(x_1) < f(x_2)).$$

Определение 1.10. Числовая функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху на множестве $A \subset D(f)$, если найдется число M такое, что

$$\forall x \in A \qquad f(x) < M.$$

Определение 1.11. Числовая функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу на множестве $A \subset D(f)$, если найдется число m такое, что

$$\forall x \in A \qquad f(x) > m.$$

Определение 1.12. Числовая функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве $A \subset D(f)$, если найдется число K такое, что:

$$\forall x \in A \qquad |f(x)| < K.$$

Пример 1.3. Функция $y = \sin x$ ограничена, так как $|f(x)| < 2$ $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

Пример 1.4. Функция $y = 2 - x^2$ ограничена сверху, так как $f(x) < 3$ $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

Определение 1.13. Если числовая функция $y = f(x)$ принимает одно и то же значение c на множестве $A \subset D(f)$, то говорят, что функция тождественно равна c на множестве A, и обозначают $f(x) \equiv c$.

1.8. Применение функций в экономике

1.8.1. Производственные функции

Рассмотрим некоторую производственную систему.

Определение 1.14. Функция, выражающая зависимость объема производства от величины затраченных ресурсов, называется производственной.

Существует целое семейство производственных функций. Рассмотрим производственную функцию (рис. 1.1)

$$y = f(x),$$

где x — суммарная величина затрат в стоимостном выражении,
y — суммарный выпуск в стоимостном выражении.

По своему экономическому смыслу, $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Производственная функция отражает существующую технологию: изменение технологии ведет к изменению производственной функции.

Если предположить, что производственная функция строго возрастает, т.е. любое увеличение затрат ведет к увеличению выпуска, то производственная функция имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, которая определяет величину производственных затрат x, необходимых для выпуска объема y. Эта функция называется функцией затрат. Она будет строго возрастающей.

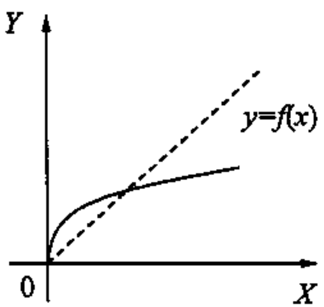


Рис. 1.1.

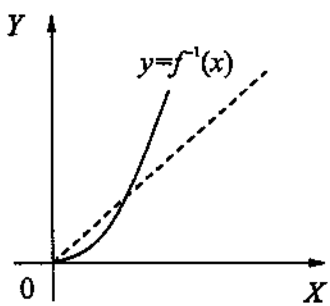


Рис. 1.2.

1.8.2. Кривые спроса и предложения. Точка равновесия

Рассмотрим функцию зависимости спроса D от цены на товар P. Чем меньше цена, тем больше спрос при постоянной покупательной способности населения. Обычно зависимость D от P имеет вид ниспадающей кривой (рис. 1.3):

$$D = kP^a + c, \text{ где } a < 0.$$

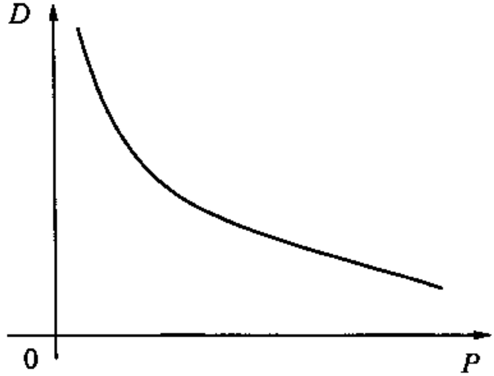


Рис.1.3

Рассмотрим функцию предложения S от цены на товар P. Предложение растет с увеличением цены на товар. Зависимость S от P имеет следующий вид:

$$S = P^b + d, \text{ где } b \geq 1.$$

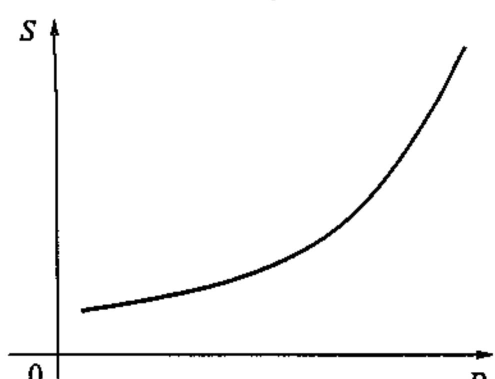


Рис. 1.4.

Параметры c и d — так называемые экзогенные величины; они зависят от ряда причин (благосостояние общества, политическая обстановка и т.п.). Переменные, входящие в формулы, положительны, поэтому графики функций имеют смысл только в первой координатной четверти.

Для экономики представляет интерес условие равновесия, т.е. когда спрос равен предложению. Такое условие задается уравнением

$$D(P) = S(P)$$

и соответствует точке пересечения кривых D и S — это так называемая точка равновесия (точка M_1). Цена P_0, при которой выполняется данное условие, называется *равновесной* (рис. 1.5).

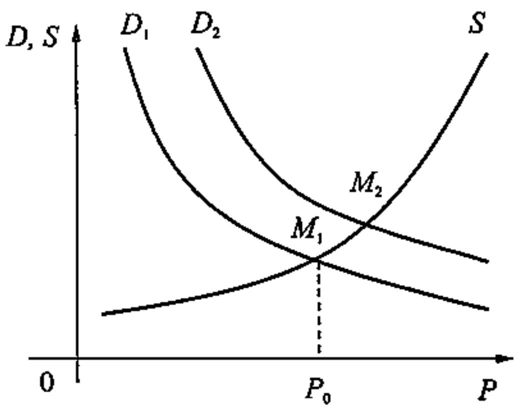


Рис. 1.5

При увеличении благосостояния населения, что соответствует росту величины c, точка равновесия M_1 смещается вправо, так как кривая D поднимается вверх; при этом цена на товар растет при неизменной кривой предложения S.

1.8.3. Паутинная модель рынка

Рассмотрим простейшую задачу поиска равновесной цены (рис. 1.6). Это одна из основных проблем рынка, означающая фактический торг между производителем и покупателем.

Пусть сначала цену P_1, называет производитель (в простейшей схеме он же и продавец). Цена P_1 на самом деле выше равновесной (естественно, всякий производитель стремится получить максимум выгоды из своего производства). Покупатель оценивает спрос D_1 при этой цене, находит его низким и называет свою цену P_2, при которой спрос D_1 равен предложению. Цена P_2 ниже равновесной (всякий покупатель стремится купить дешевле). В свою очередь производитель оценивает спрос D_2, соответствующий цене P_2, и определяет свою цену P_3, при которой спрос равен предложению, эта цена выше равновесной.

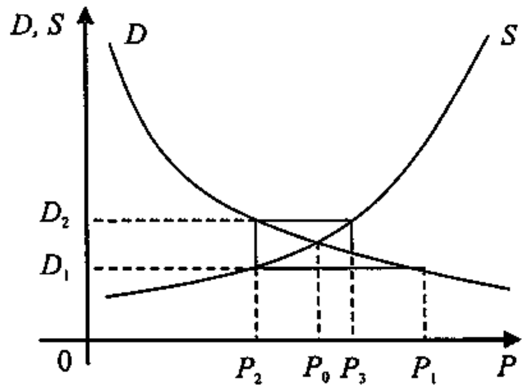


Рис. 1.6

Процесс торга в итоге приводит к приближению к равновесной цене, т.е. к «скручиванию» спирали (паутине). Если рассматривать последовательность чисел, состоящую из называемых в процессе торга цен, то она имеет своим пределом равновесную цену P_0.

1.9. Элементы комбинаторного анализа

Основные задачи комбинаторного анализа — размещение объектов в соответствии со специальными правилами и нахождение числа способов, которыми это можно сделать. Если правила просты, то основным является подсчет числа возможностей для осуществления искомого размещения. Если правила тонкие или запутанные, то главной проблемой становится вопрос существования таких размещений и нахождения методов их построения.

Пусть дано множество S произвольной природы.

Определение 1.15. Размещением объема k элементов множества S называется упорядоченная выборка k элементов из множества S.

Определение 1.16. Сочетанием объема k называется неупорядоченная выборка k элементов множества S.

Определение 1.17. Размещение (сочетание) называется размещением (сочетанием) с повторением или с возвращением, если элементы в нем могут повторяться.

Пример 1.5. $S=\{a, b, c\}$; $n=3$, $k=2$.

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc — размещения с повторением — 9 шт.;
ab, ac, ba, bc, ca, cb — размещения без повторения — 6 шт.;
aa, ab, ac, bb, bc, cc — сочетания с повторением — 6 шт.;
ab, ac, bc — сочетания без повторения — 3 шт.

Определение 1.18. Произведение первых n натуральных чисел называется n-факториалом и обозначается $n!$.

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,.$$

Например, $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. По определению полагают $0!=1$.

Размещения без повторения. Число размещений без повторений из n элементов по r (объема r) обозначается $A_n^r = (n)_r$.

$$A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) = \frac{n\cdot(n-1)\ldots 1}{(n-r)\ldots 1} = \frac{n!}{(n-r)!}\,.$$

Если $r=n$, то $A_n^n = n!$.

$$A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!\,.$$

Сочетания без повторения. Число сочетаний без повторений из n элементов по r (объема r) обозначается $C_n^r = \binom{r}{n}$.

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = C_n^{n-r}\,.$$

$$C_n^{n-1} = C_n^1 = n\,,\quad C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Размещения с повторением. Количество размещений с повторением из n элементов по r (объема r) равно n^r.

Сочетания с повторением. Число сочетаний с повторениями из n элементов по r (объема r) равно

$$C_{n+r-1}^{n-1}=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\cdot r!}=C_{n+r-1}^{r}.$$

Бином Ньютона. Биномом Ньютона называют выражение вида

$$(x+y)^n=\overbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}^{n}.$$

$$(x+y)^n=C_n^0y^n+C_n^1y^{n-1}x+C_n^2y^{n-2}x^2+\ldots+C_n^{n-1}yx^{n-1}+C_n^nx^n,$$

или

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^iy^{n-i}.$$

Пример 1.6. $(x\pm y)^2=C_2^0y^2\pm C_2^1xy+C_2^2x^2=y^2\pm 2xy+x^2$.

Пример 1.7.

$$(x\pm y)^4=C_4^0y^4\pm C_4^1y^3x+C_4^2y^2x^2\pm C_4^3yx^3+C_4^4x^4=y^4\pm 4y^3x+$$

$$+6y^2x^2\pm 4x^3y+x^4.$$

Глава 2

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

2.1. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности

Определение 2.1. Функция, заданная на множестве натуральных чисел со значениями во множестве действительных чисел, называется числовой последовательностью.

Определение 2.1'. Числовой последовательностью $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется занумерованное множество действительных чисел.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$$

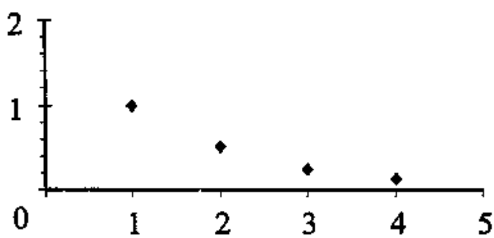
Определение 2.2. Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного ε ($\forall\varepsilon > 0$) существует номер N такой, что при всех номерах $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся к числу A. Кратко это можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A .$$

Пример 2.1.

Рассмотрим последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}} \dots$.

Изобразим ее поведение графически.



Из диаграммы видно, что с ростом n члены последовательности стремятся к нулю. Покажем, что предел этой последовательности равен нулю с помощью определения предела.

Возьмем в качестве ε число $\frac{1}{100}$. Найдем номер N такой, что при всех номерах $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| < \frac{1}{100}$,

$$\varepsilon = \frac{1}{100},$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{100},$$

$$n - 1 > \log_2 100,$$

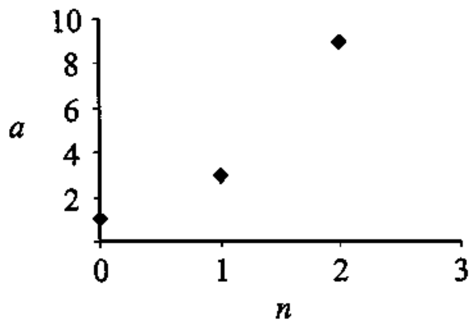
$$n > 1 + \log_2 100.$$

В качестве N можно взять следующее за числом $1 + \log_2 100$ натуральное число. Аналогично можно подобрать номер N для произвольного $\varepsilon > 0$.

Определение 2.3. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный $+\infty$ ($-\infty$), если для любого числа $G > 0$ найдется номер N такой, что при всех номерах $n > N$ выполняется неравенство $a_n > G$ ($a_n < -G$).

Пример 2.2. Рассмотрим последовательность

$\{3^n\}_{n=0}^{\infty}$ 1, 3, 9, 27...



Возьмем $G = 1000$,

$3^n > 1000$,

$n > \log_3 1000$.

2.2. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a \in R$ за исключением быть может, самой точки a.

Определение 2.4. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Кратко это можно записать так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A .$$

Выясним, что представляет собой геометрически понятие предела функции. Раскроем знаки модуля в неравенствах из определения предела функции:

$$|x-a| < \delta, \; -\delta < x - a < \delta,$$

$$a - \delta < x < a + \delta, \quad x \in (a - \delta, \quad a + \delta).$$

Аналогично $f(x) \in (A - \varepsilon \quad A + \varepsilon)$.

Геометрически это означает (рис. 2.1), что какую бы окрестность точки A на оси OY мы ни взяли, всегда найдется окрестность точки a на оси OX, которую функция переводит в окрестность оси OY.

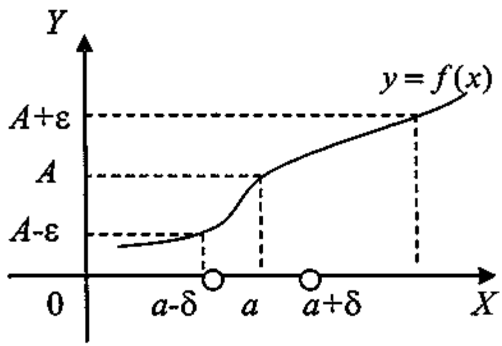


Рис. 2.1.

2.3. Бесконечные пределы. Односторонние пределы

Определение 2.5. Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, равный $+\infty$ ($-\infty$), если $\forall M > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > M$ ($f(x) < -M$).

Определение 2.6. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ слева, или левосторонним пределом, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих условно $a - x < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 2.7. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ справа, или правосторонним пределом, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $x - a < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \text{ или } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \text{ — слева,}$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \text{ или } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \text{ — справа.}$$

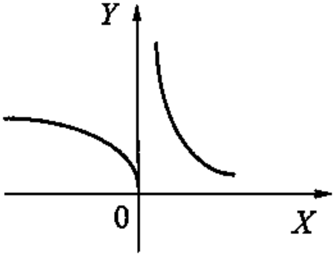
Функция имеет предел в некоторой точке, равный некоторому значению, тогда и только тогда, когда существуют и равны этому же значению оба односторонних предела.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{A}.$$

Пример 2.3.

Найти предел функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 2^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$



$x \to 0-0$, $\qquad x \to 0+0$,

$\frac{1}{x} \to -\infty$, $\qquad \frac{1}{x} \to +\infty$,

$2^{\frac{1}{x}} \to 0$. $\qquad 2^{\frac{1}{x}} \to +\infty$.

Предела функции при $x \to 0$ не существует.

2.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Их свойства

Определение 2.8. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой (б.м.) функцией при $x \to a$, если ее предел при $x \to a$ равен нулю.

$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Определение 2.9. Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой (б.б.) функцией при $x \to a$, если ее предел при $x \to a$ равен $+\infty$ $(-\infty)$.

Пример 2.4. Функция $\gamma(x) = x^2$ при $x \to 0$ — б.м., при $x \to +\infty$ — б.б., при $x \to 2$ не является ни б.б. ни б.м.

<u>Теорема 2.1</u> **(о связи предела и бесконечно малой функции).** Если функция $y = f(x)$ имеет предел $\lim\limits_{n\to a} f(x) = A$, то разность между функцией и значением предела есть функция, бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство. Необходимо показать, что

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A$ б.м. функция при $x \to a$.

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, для $|x-a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Сравним это с определением б. м. функции:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, для $|x-a| < \delta$ будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Сравнивая определения предела функции и б. м. функции, видим, что $f(x) - A$ — б.м. при $x \to a$.

Теорема 2.2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ — б.м. функции при $x \to a$.

Надо доказать, что $\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)$ есть б.м. функция при $x \to a$.

Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда и $\frac{\varepsilon}{3} > 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Так как } \alpha(x) \text{ — б.м. при } x \to a,\ \exists\ \delta_1 > 0,\ |x-a| < \delta_1\ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{3};\\ \text{так как } \beta(x) \text{ — б.м. при } x \to a,\ \exists\ \delta_2 > 0,\ |x-a| < \delta_2\ |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{3};\\ \text{так как } \gamma(x) \text{ — б.м. при } x \to a,\ \exists\ \delta_3 > 0,\ |x-a| < \delta_3\ |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.\end{array}\right\} \quad (2.1)$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3)$, тогда при $|x-a| < \delta$ будут выполняться все три неравенства (2.1) одновременно.

$$|\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| + |\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, для $\forall \varepsilon > 0$ мы нашли $\delta = \min(\delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3)$ такое, что при всех $|x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)| < \varepsilon, \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)$ есть б.м. функция при $x \to a$.

Теорема 2.3. Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на ограниченную в некоторой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. $\alpha(x)$ — б. м. при $x \to a$ функция;

$f(x)$ — ограниченная в некоторой окрестности точки a функция.

Докажем, что $\alpha(x)$ $f(x)$ — б. м. функция при $x \to a$.

Поскольку $f(x)$ — ограниченная в некоторой окрестности точки a функция, то $\exists\ \delta_1 > 0$ и $\exists\ K$ такие, что при при всех x

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < K. \qquad (2.2)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим число $\dfrac{\varepsilon}{K} > 0$,

так как $\alpha(x)$ — б. м. при $x \to a$ функция, $\exists\ \delta_2 > 0$ такое, что:

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{K}. \qquad (2.3)$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1,\ \ \delta_2)$, тогда при $|x-a| < \delta$ будут выполняться оба неравенства (2.2) и (2.3) одновременно.

$$|\alpha(x)\cdot f(x)| = |a(x)|\cdot|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}\cdot K = \varepsilon$$

Итак, для $\forall\varepsilon > 0$ мы нашли $\delta = \min(\delta_1,\ \ \delta_2)$ такое, что при всех x, удовлетворяющих $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|\alpha(x)\cdot f(x)| < \varepsilon, \Rightarrow \alpha(x)\cdot f(x)$ – б. м. функция при $x \to a$.

Теорема 2.4. Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть функция, бесконечно малая при $x \to a$.

Теорема 2.5 **(о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций).** Если $\alpha(x)$ — б. м. при $x \to a$ функция и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть б. б. функция при $x \to a$.

Если $\beta(x)$ — при $x \to a$ б. б. функция, то функция $\dfrac{1}{\beta(x)}$ есть б. м. функция при $x \to a$.

2.5. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ б.м. функции при $x \to a$. Предположим, что существует предел их отношения и он равен l.

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l .$$

Тогда если:

1. $l = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными б.м.;

2. l — число, $l \neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются б.м. одинакового порядка;

3. $l = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется б.м. более высокого порядка, чем $\beta(x)$;

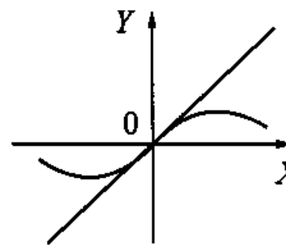
4. $l = \pm\infty$, то функция $\beta(x)$ называется б.м. более высокого порядка, чем $\alpha(x)$.

Пример 2.5.

$\alpha(x) = \sin(x)$, $\beta(x) = x$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — эквивалентные б.м. функции при $x \to 0$.



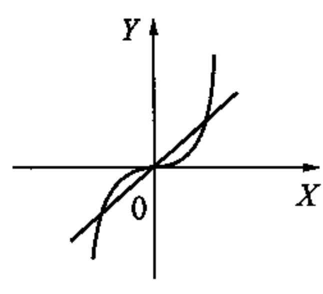
Пример 2.6.

$\alpha(x) = x^3$,

$\beta(x) = x$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = +\infty,$$



$\alpha(x)$ — б.м. функция более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \to \infty$.

2.6. Основные теоремы о пределах

Теорема 2.6. **(о предельном переходе в равенстве)** Если две функции принимаютют одинаковые значения в окрестности некоторой точки, то их пределы в этой точке совпадают.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема 2.7. **(о предельном переходе в неравенстве)** Если значения функции *f(x)* в окрестности некоторой точки не превосходят соответствующих значений функции *g(x)* , то предел функции *f(x)* в этой точке не превосходит предела функции *g(x)*.

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема 2.8. Предел постоянной равен самой постоянной.

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

Доказательство. $f(x) = c$, докажем, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В качестве δ можно взять любое положительное число. Тогда при $|x - a| < \delta$

$$|c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Теорема 2.9. Функция не может иметь двух различных пределов в одной точке.

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \to a} f(x) = B.$$

По теореме о связи предела и бесконечно малой функции:

$f(x) - A = \alpha(x)$ — б.м. при $x \to a$,

$f(x) - B = \beta(x)$ — б.м. при $x \to a$.

Вычитая эти равенства, получим: $-\begin{cases} f(x)\text{-}A = \alpha(x), \\ f(x)\text{-}B = \beta(x), \end{cases}$

$$B - A = \alpha(x) - \beta(x).$$

Переходя к пределам в обеих частях равенства при $x \to a$, имеем: $B - A = 0$, т.е. $B = A$. Получаем противоречие, доказывающее теорему.

Теорема 2.10. Если каждое слагаемое алгебраической суммы функций имеет предел при $x \to a$, то и алгебраическая сумма имеет предел при $x \to a$, причем предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)-h(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x).$$

Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = C$.

Тогда, по теореме о связи предела и б.м. функции:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - A = \alpha(x), \\ g(x) - B = \beta(x), \\ h(x) - c = \gamma(x), \end{array}\right\} \text{ где } \alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \text{ — б.м. при } x \to a.$$

Сложим алгебраически эти равенства:

$$f(x)+g(x)-h(x)-(A+B-C) = \underbrace{\alpha(x)+\beta(x)-\gamma(x)},$$

где $a(x)+\beta(x)-\gamma(x)$ б.м. при $x \to a$.

По теореме о связи предела и б.м. функции:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)-h(x)) = A+B-C =$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x).$$

Теорема 2.11. Если каждый из сомножителей произведения конечного числа функций имеет предел при $x \to a$, то и произведение имеет предел при $x \to a$, причем предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 2.12. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \to a$, причем $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, то и их частное имеет предел при $x \to a$, причем предел частного равен частному пределов.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

2.7. Признаки существования предела

Теорема 2.13 **(теорема о двух милиционерах).** Если функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки a заключена между двумя функциями $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, т.е. выполняется неравенство $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ $\forall x$, причем эти функции имеют одинаковый предел при $x \to a$, то существует предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$, равный этому же значению (рис. 2.2).

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x),$$

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = A \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

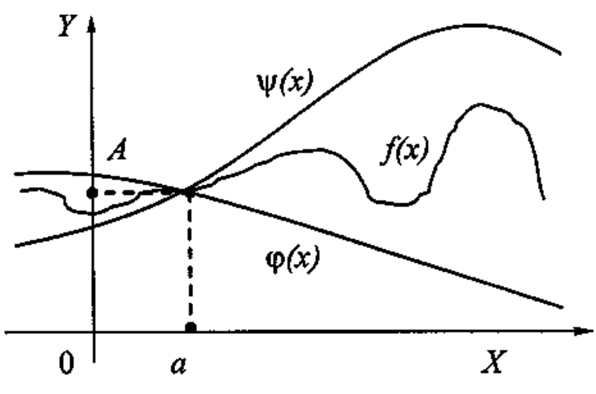


Рис. 2.2

Теорема 2.14. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастет (убывает) в некоторой окрестности точки a и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел при $x \to a$.

2.8. Замечательные пределы

Теорема 2.15. Предел отношения синуса малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, при стремлении величины дуги к нулю равен единице.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теорема 2.16. Предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ равен $\ell \approx 2{,}71$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ell, \quad \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\ell.$$

2.9. Раскрытие неопределенностей

В простейших случаях пределы вычисляются с помощью теорем о пределах.

Иногда возникают ситуации, когда не удается вычислить предел с помощью теорем. В этих случаях говорят, что получена неопределенность.

Виды неопределенностей:

$$\left[\frac{0}{0}\right];\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right];\ [0\cdot\infty];\ [\infty-\infty];\ \left[1^{\infty}\right];\left[\infty^{0}\right];\ldots.$$

Процесс нахождения предела в этом случае называется раскрытием неопределенности.

Пример 2.6.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Пример 2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

Пример 2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

Пример 2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-6}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{6}{x^2}}=\dfrac{3}{2}.$

2.10. Непрерывные проценты

Формула сложных процентов имеет вид

$$Q=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

где Q – сумма вкладов по истечении n периодов,
Q_0 – первоначальный вклад,
p – процент начисления за период.

(Аналогичные формулы используют в демографических расчетах прироста населения и в экономических прогнозах увеличения валового национального продукта.)

Пусть первоначальный депозит Q_0 помещен в банк под p = 100% годовых, через год сумма составит

$$Q=Q_0\left(1+\frac{100}{100}\right)^1=2Q_0.$$

Предположим, что через полгода счет закрыт с результатом

$$Q_1=Q_0\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}Q_0,$$

и эта сумма вновь помещена в качестве депозита в том же банке. В конце года депозит будет составлять

$$Q_2 = Q_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25Q_0.$$

Будем уменьшать срок размещения депозита в банке при условии его последующего размещения после изъятия.

При ежеквартальном повторении этих операций депозит в конце года составит

$$Q_4 = Q_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44Q_0.$$

При ежемесячном повторении этих операций депозит в конце года составит

$$Q_{12} = Q_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}61Q_0.$$

При ежедневном повторении этих операций депозит в конце года составит

$$Q_{365} = Q_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}714Q_0.$$

При ежечасном повторении этих операций депозит в конце года составит

$$Q_{8720} = Q_0\left(1+\frac{1}{8720}\right)^{8720} = 2{,}718Q_0$$

и т.д. Последовательность значений увеличения первоначального вклада

$$\left\{q_n = \frac{Q_n}{Q_0} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

имеет предел при $n \to \infty$, равный e.

Доход, который можно получить при непрерывном использовании процентов на проценты, может составить в год не более чем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n - Q_0}{Q_0}100\% = (e-1)100\% \approx 172\%.$$

Если p – процент начисления и год разбит на n частей, то через t лет сумма депозита достигнет величины

$$Q_n = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} = Q_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = Q_0\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt},$$

где $r = \frac{p}{100}$.

Если ввести новую переменную $m = \frac{n}{r}$, то при $n \to \infty \Rightarrow m \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{m\to\infty} Q_0\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} = Q_0 e^{rt}.$$

Расчеты, выполненные по этой формуле, называют вычислениями по непрерывным процентам.

Пример 2.10. Темп инфляции составляет 1% в день. На сколько уменьшится первоначальная сумма Q_0 через полгода?

$$Q = Q_0\left(1-\frac{1}{100}\right)^{182} = Q_0\left[\left(1-\frac{1}{100}\right)^{-100}\right]^{-\frac{182}{100}} \approx Q_0 e^{-1,82} = \frac{Q_0}{e^{1,82}}.$$

Инфляция уменьшит начальную сумму примерно в шесть раз.

Глава 3
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

3.1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 3.1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 3.2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве $A \subset \boldsymbol{R}$, если она непрерывна в каждой точке множества А.

Сравнивая определение 3.1 с определением предела функции, можно получить, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда ее предел при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 3.3. Приращением аргумента называется разность двух значений переменной x и обозначается Δx. Приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента, называется разность двух значений функции от соответствующих аргументов и обозначается Δy:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = f(x) - f(x_0).$$

Из определения 1 следует:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, для $|x - a| < \delta$ будет выполняться $|\Delta y| < \varepsilon$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции.

3.2. Свойства функций, непрерывных на множестве

Теорема 3.1. Сумма и произведение конечного числа непрерывных на некотором множестве функций есть функция, непрерывная на этом множестве.

Доказательство (следует из основных теорем о пределах).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывны в точке x_0, тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0).$$

Следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство для произведения функций проводится аналогично.

Теорема 3.2. Частное от деления двух непрерывных на множестве функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых знаменатель отличен от нуля.

Теорема 3.3 **(теорема Вейерштрасса).** Всякая непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

3.3. Точки разрыва функции

Функция является непрерывной в точке, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 3.4. Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называют точками разрыва функции.

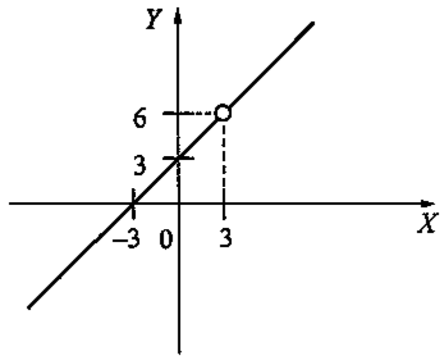
Определение 3.5. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы в этой точке.

Определение 3.6. Точка разрыва первого рода называется точкой устранимого разрыва, если односторонние пределы в этой точке равны.

Определение 3.7. Скачком функции в точке разрыва первого рода называется модуль разности односторонних пределов в этой точке.

Определение 3.8. Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если она не является точкой разрыва первого рода (если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен $+\infty(-\infty)$).

Пример 3.1.



$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-9}{x-3}=,$$

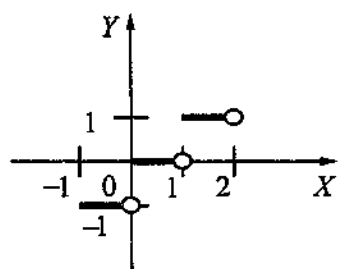
$$=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}(x+3)=6$$

$\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3+0}(x+3)=6, x=3$ — точка устранимого разрыва.

Функцию можно доопределить до непрерывной функции:

$y_1=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3;\\ 6, & x=3;\end{cases}\Leftrightarrow y=x+3$ — непрерывная функция.

Пример 3.2.



$y=[x]$ — целая часть числа.

Рассмотрим точку $x=1$.

$$\lim_{x\to 1-0}[x]=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}[x]=\lim_{x\to 1-0}0=0,$$

$$\lim_{x\to 1+0}[x]=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[x]=\lim_{x\to 1+0}1=1.$$

Следовательно, $x=1$ — точка разрыва первого рода, скачок в ней равен единице.

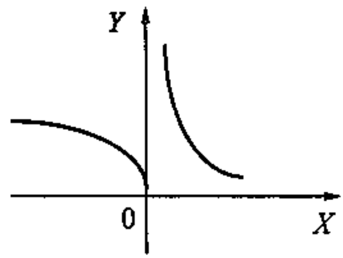
Пример 3.3. Рассмотрим функцию $y=2^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

$x \to 0-0,$ $\qquad$ $x \to 0+0,$

$\frac{1}{x} \to -\infty,$ $\qquad$ $\frac{1}{x} \to +\infty,$

$2^{\frac{1}{x}} \to 0.$ $\qquad$ $2^{\frac{1}{x}} \to +\infty.$



Следовательно, $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

3.4. Непрерывность производственных функций

Рассмотрим производственную функцию зависимости производительности труда y от капиталовооруженности труда k:

$$y = f(k),\ k \geq 0.$$

Она характеризует зависимость выпуска продукции на одного работника y от величины капитала в расчете на одного работника k. Широко известная макроэкономическая производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид

$$y = k^{\alpha},\ k \geq 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

Данная функция определена и непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$. Этот факт не согласуется с реальной ситуацией. Рассмотрим капиталовооруженность $k = K/L$, где K — величина капитала, L — число занятых. Приращение Δk нельзя сделать сколь угодно малым. Изменение капитала K также не может быть сколь угодно малым. Почти все единицы, встречающиеся в экономике, не допускают дробления.

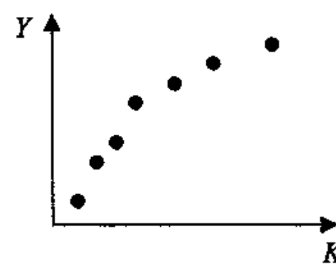


Рис. 3.1.

Таким образом, у реальной производственной функции область определения и множество значений являются дискретными множествами. График реальной производственной функции изображен на рис. 3.1.

Функция Кобба — Дугласа представляет собой математическую модель реальной производственной функции, отражающую наиболее существенные характеристики изучаемого объекта. Она является непрерывной на $[0, +\infty)$.

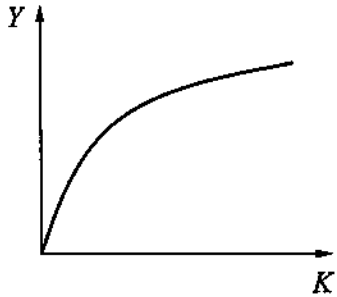


Рис. 3.2.

Ее график показан на рис. 3.2:

Такая абстракция правомерна, когда речь идет о макроэкономической производственной функции. Если же рассматривать маленькую мастерскую, производящую штучный товар, то дискретную производственную функцию нельзя заменить непрерывной.

Глава 4
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на (a,b), пусть $x_0 \in (a,b)$. Дадим в точке x_0 приращение аргументу Δx так, что точка $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Тогда функция получит соответствующее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 4.1. Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует и конечен. Функция называется дифференцируемой в точке x_0.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Определение 4.2. Функция называется дифференцируемой на множестве $A \subset \mathbf{R}$, если она дифференцируема в каждой точке множества A.

4.2. Геометрический смысл производной

Определение 4.3. Касательной к плоской кривой называется предельное положение секущей, когда вторая точка пересечения неограниченно приближается по кривой к первой точке (рис. 4.1).

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на (a,b), $x_0 \in (a,b)$.

Дадим приращение аргументу Δx так, что точка $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Функция получит приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Проведем секущую к графику (рис. 4.2) через точки $A(x_0\ ,\ f(x_0))$, $B(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Рис. 4.1.

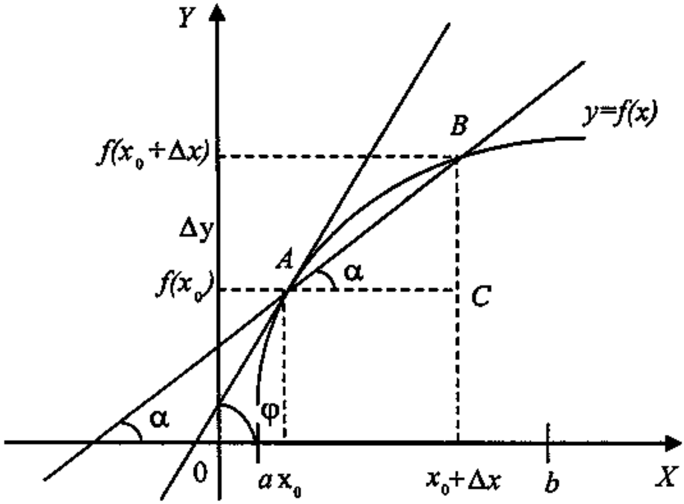


Рис. 4.2

Рассмотрим ΔABC. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$, $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ $B \to A$, секущая стремится к касательной, $\alpha \to \varphi$, $\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, получим $tg\varphi = f'(x_0)$.

Производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в данной точке.

4.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 4.1. **(необходимое условие дифференцируемости функции).** Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Дадим в этой точке аргументу приращение Δx. Функция получит приращение Δy. Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$.

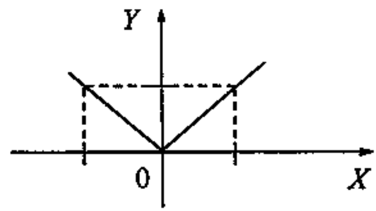
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0 .$$

Следовательно, $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Следствие. Если x_0 — точка разрыва функции, то в ней функция не дифференцируема.

Утверждение, обратное теореме, не верно. Из непрерывности не следует дифференцируемость.

Пример 4.1. $y = |x|$, $x_0 = 0$.



$\Delta x > 0,\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$

$\Delta x < 0,\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 .$

В точке $x_0 = 0$ функция непрерывна, но производной не существует.

4.4. Свойства производных

Теорема 4.2. Производная постоянной функции равна нулю.

Доказательство. $f(x) = c$, $\forall x_0\ \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0$,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 .$$

Теорема 4.3. Если функции u, v, w дифференцируемы в некоторой точке, то и их алгебраическая сумма также дифференцируема в этой точке, причем производная алгебраической суммы равна алгебраической сумме производных и выполняется равенство

$$(u + v - w)' = u' + v' - w' .$$

Теорема 4.4. Если функции u и v дифференцируемы в некоторой точке, то и их произведение также дифференцируемо в этой точке, причем выполняется равенство

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

Теорема 4.4. Если функции u и v дифференцируемы в некоторой точке и функция v в этой точке отлична от нуля, то существует производная частного в этой точке, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Теорема 4.5. **(производная сложной функции).** Если функции $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции своих аргументов, то и их композиция является дифференцируемой функцией, причем производная сложной функции равна производной внешней функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

$$\left(f(\varphi(x)) \right)' = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Теорема 4.6. **(теорема Лагранжа).** Конечное приращение дифференцируемой функции равно произведению соответствующего приращения аргумента на производную функции в некоторой промежуточной точке.

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Теорема 4.7. **(теорема Ролля).** Между двумя нулями дифференцируемой функции всегда найдется хотя бы один ноль производной.

Доказательство. Пусть $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Из теоремы Лагранжа следует, что найдется точка c, $x_1 \le c \le x_2$, такая, что

$$f'(c)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f'(c) = 0.$$

Две последние теоремы носят название теорем о конечных приращениях.

4.5. Производные от элементарных функций

Справедливы следующие формулы:

1. $\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$, $\qquad \left(u^{n}\right)' = nu^{n-1}u'$;

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$, $\qquad \left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\ u'$;

   $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$, $\qquad \left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$;

3. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $\qquad \left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$;

   $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, $\qquad \left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

4. $\left(\sin x\right)' = \cos x$, $\qquad \left(\sin u\right)' = \cos u\, u'$;

5. $(\cos x)' = -\sin x$, $\qquad (\cos u)' = -\sin u\ u'$;

6. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\qquad \left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

7. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\qquad \left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

8. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

9. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

10. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\qquad \left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

11. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $\qquad \left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

4.6. Дифференциал

Определение 4.4. Главная линейная относительно Δx часть малого приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается dy.

Если приращение функции можно представить в виде $\Delta y = k\Delta x + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — б.м. функция более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$ ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = 0$), тогда

$$dy = k\Delta x .$$

Пример 4.2. $y = x^2$.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 =$$
$$= 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 ,$$

$$dy = 2x_0\Delta x .$$

Теорема 4.8. Функция не может иметь двух различных дифференциалов.

Доказательство. Предположим противное — функция имеет два дифференциала. Тогда малое приращение функции можно представить в виде

$$\Delta y = k_1\Delta x + \alpha(\Delta x) ,$$

$$\Delta y = k_2\Delta x + \beta(\Delta x) ,$$

где $\alpha(\Delta x)$, $\beta(\Delta x)$ — б.м. функции более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Вычтем эти равенства:

$$(k_2 - k_1)\Delta x = \alpha(\Delta x) - \beta(\Delta x) .$$

Разделим обе части на Δx:

$$k_2 - k_1 = \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\beta(\Delta x)}{\Delta x} .$$

Переходя к пределу в обеих частях равенства при $\Delta x \to 0$, получим

$$k_2 - k_1 = 0 ,$$

$$k_2 = k_1 .$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

4.7. Связь между производной и дифференциалом

Теорема 4.9. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке она имеет дифференциал.

Доказательство. Функция $y = f(x)$ — дифференцируема в точке x_0,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

По теореме о связи предела и б.м. функции:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — б.м. функция при $\Delta x \to 0$.

Умножим обе части на Δx:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

$\alpha(\Delta x)\Delta x$ — б.м. функция более высокого порядка, чем Δx.

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Следовательно, функция имеет дифференциал и $k = f'(x_0)$.

Теорема 4.10. Если функция имеет дифференциал в некоторой точке, то она имеет производную в этой точке.

Доказательство. Пусть функция имеет дифференциал $dy = k\Delta x$. Тогда

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha(\Delta x).$$

Разделим обе части на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$k = f'(x_0).$$

Таким образом, функция имеет производную и $k = f'(x_0)$.

Из этих теорем следует, что $dy = f'(x_0)\Delta x$.

4.8. Дифференциал независимой переменной

Рассмотрим функцию $y = x$, $dy = dx$. Из теорем о связи производной и дифференциала следует, что:

$$dy = 1 \cdot \Delta x,$$

$$dx = dy = \Delta x.$$

Дифференциал независимой переменной равен малому приращению этой переменной.

Таким образом, получена формула для вычисления дифференциала функции:

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Дифференциал функции равен произведению производной функции в данной точке на дифференциал независимой переменной.

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}.$$

4.9. Геометрический смысл дифференциала

Дана дифференцируемая функция $y = f(x)$. Возьмем произвольную точку x_0 и проведем в этой точке касательную к графику (рис. 4.3). Дадим аргументу приращение Δx.

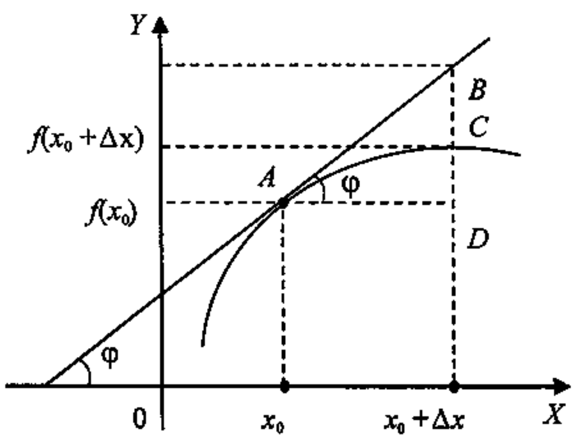


Рис. 4.3

Рассмотрим ΔABD:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BD}{AD},$$
$$BD = AD \cdot \operatorname{tg}\varphi,$$
$$BD = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy,$$
$$BD = dy.$$

Дифференциал функции в точке равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в данной точке.

4.10. Свойства дифференциала

Дифференциал обладает следующими основными свойствами.

1. $d(c) = 0$.
2. $d(u + w - v) = du + dw - dv$.
3. $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$.
4. $d(cu) = cd(u)$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$.
6. $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$, $y = f(\varphi(x))$,

$df = f'_z dz = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

Форма дифференциала инвариантна (неизменна): он всегда равен произведению производной функции на дифференциал аргумента, независимо от того, простым или сложным является аргумент.

4.11. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$.

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x), \ \Delta y \approx dy,$$

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x,$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Получаем формулу, используемую в приближенных вычислениях:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Пример 4.3. Вычислить $\sin 31^\circ$.

$f(x) = \sin x$,

$f'(x)=\cos x$,

$x_0 = 30^\circ$,

$\Delta x = 1^\circ$,

$\sin 31^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}64$.

4.12. Производные высших порядков

Дана функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале (a,b), т.е. на этом интервале она имеет производную $y' = f'(x)$, являющуюся некоторой функцией от x. Предположим, что эта функция также дифференцируема на интервале (a,b). Тогда ее производная называется второй производной от исходной функции $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$. Полученная функция может вновь оказаться дифференцируемой. Тогда ее производная называется третьей производной: $f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$.

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Пример 4.4. $f(x)=7x^5+6x^4+2x^3-3$,

$$f'(x)=35x^4+24x^3+6x^2,$$

$$f''(x)=140x^3+72x^2+12x,$$

$$f'''(x)=420x^2+144x+12,$$

$$f^{IV}(x)=840x+144,$$

$$f^{V}(x)=840,$$

$$f^{VI}(x)=0.$$

4.13. Правило Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 4.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1$.

Замечание. Правило Лопиталя распространяется на раскрытие неопределенностей вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 4.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x}{2x^2+5} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-7}{4x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

4.14. Возрастание и убывание функций

Определение 4.5. Числовая функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей (убывающей) на множестве $A \subset D(f)$, если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$\forall x_1, x_2 \in A \subset D(f) : x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2)).$$

Из определения следует, что если функция возрастает (убывает), то

$$\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta y > 0, \quad \Delta x < 0 \Rightarrow \Delta y < 0;$$
$$(\Delta x > 0 \Rightarrow \Delta y < 0, \quad \Delta x < 0 \Rightarrow \Delta y > 0).$$

Приращение функции и приращение аргумента возрастающей (убывающей) функции имеют одинаковые (противоположные) знаки.

<u>Теорема 4.11.</u> Если дифференцируемая функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то в каждой точке этого интервала производная этой функции неотрицательна (неположительна).

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и дадим в ней аргументу приращение $\Delta x > 0$ так, что $x_0 + \Delta x \in (a,b)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 .$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x) \geq 0 .$$

Теорема 4.12. Если производная функции на некотором интервале неотрицательна (неположительна), то на этом интервале функция возрастает (убывает).

4.15. Экстремумы функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b).

Определение 4.5. Точка $x_0 \in (a,b)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции, если найдется некоторая окрестность этой точки, для всех точек которой будет выполняться условие:

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Точки локального максимума и минимума называют точками экстремума.

Теорема 4.13 **(необходимый признак экстремума функции).** Если точка x_0 является точкой локального максимума (минимума) функции, то производная в этой точке равна нулю или не существует.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a,b), $x_0 \in (a,b)$, найдется число δ такое, что:

$$\forall \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ \ f(x) < f(x_0) .$$

Дадим аргументу приращение $\Delta x > 0$ так, что

$$x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 .$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x_0) \leq 0 .$$

Дадим аргументу приращение $\Delta x < 0$ так, что

$$x_0 + \Delta x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 .$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x_0) \geq 0 .$$

Эти неравенства выполняются одновременно только в двух случаях:

а) $f'(x_0) = 0$,

б) $f'(x_0)$ не существует.

Следствие. В точке экстремума касательная (рис. 4.4):

а) либо параллельна оси OX,

б) либо не существует.

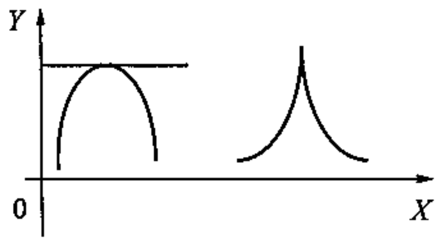


Рис. 4.4

Данный признак не является достаточным для существования экстремума, т.е. из того, что производная равна нулю или не существует в некоторой точке, не следует, что в этой точке есть экстремум (рис. 4.5).

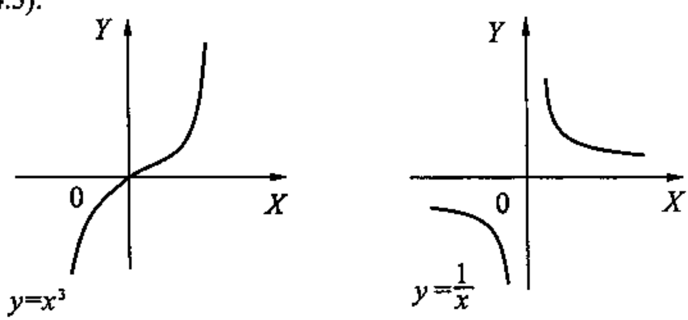


Рис. 4.5

Точки, в которых первая производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками* первой производной. Если функция имеет экстремумы, то они могут быть только в критических точках.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности (за исключением, быть может, точки x_0).

Теорема 4.14 **(достаточный признак экстремума).** Если первая производная функции в точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через нее производная меняет знак, то данная точка является точкой экстремума, причем если знак меняется с «+» на «–», то это точка максимума, с «–» на «+» — точка минимума.

Доказательство. Пусть в точке x_0 производная дифференцируемой функции равна нулю или не существует и при переходе через нее производная меняет знак с « + » на «–».

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \;\; x\in(x_0-\delta,x_0) \Rightarrow f(x) \text{ возрастает на } (x_0-\delta,x_0) \Rightarrow \\ \\ f'(x)<0 \;\; x\in(x_0,x_0+\delta) \Rightarrow f(x) \text{ убывает на } (x_0,x_0+\delta) \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow$$

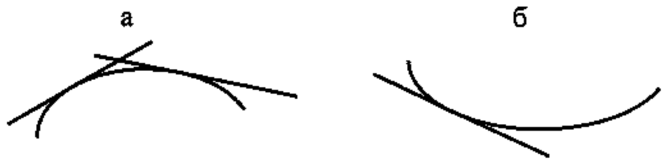
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(x_0)>f(x) \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0) \\ \Rightarrow f(x_0)>f(x) \quad \forall x\in(x_0,x_0+\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0)>f(x)$$

$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Следовательно, x_0 — точка максимума. Случай минимума рассматривается аналогично.

4.16. Выпуклость графика функции. Точки перегиба графика

Определение 4.6. График функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a,b), если касательная к графику, проведенная в любой точке этого интервала, расположена над графиком функции (рис. 4.6а — выпуклый график, $f''(x)<0$) или под графиком функции (рис. 4.6.б — вогнутый график, $f''(x)>0$).



Выпуклый график Вогнутый график

$f''<0$ $f''>0$

Рис. 4.6

<u>Теорема 4.15.</u> Если вторая производная дважды дифференцируемой функции на некотором интервале отрицательна (положительна), то график функции на данном интервале выпуклый (вогнутый).

Верна и обратная теорема.

Определение 4.7. Точки, в которой график функции меняет направление выпуклости, называют точками перегиба графика функции.

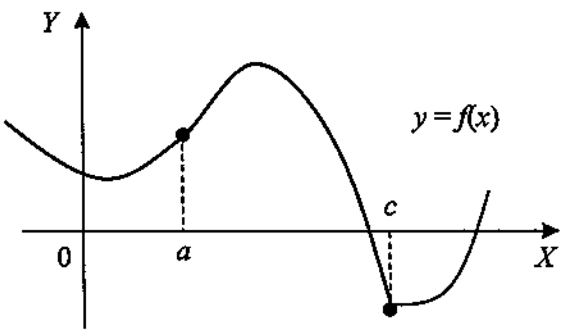


Рис. 4.7

Точка a (рис. 4.7) является точкой перегиба, а точка c нет, так как в этой точке функция не дифференцируема.

<u>Теорема 4.16.</u> **(необходимый признак точки перегиба).** Если точка x_0 является точкой перегиба графика дважды дифференцируемой функции, то в этой точке вторая производная равна нулю: $f''(x_0) = 0$.

Определение 4.8. Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются критическими точками второй производной. Если функция имеет точки перегиба, то они могут быть только в критических точках.

<u>Теорема 4.17.</u> **(достаточный признак точки перегиба).** Если вторая производная дважды дифференцируемой функции в некоторой точке равна нулю и при переходе через нее вторая производная меняет знак, то данная точка является точкой перегиба.

4.17. Асимптоты графика функции

Графики некоторых функции расположены на плоскости так, что они неограниченно приближаются к некоторой прямой. Эти прямые называются асимптотами к графику функции.

Определение 4.9. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Как правило, в точке a функция терпит разрыв второго рода.

Определение 4.10. Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Определение 4.11. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$, если функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м. при $x \to +\infty(-\infty)$.

Найдем параметры наклонной асимптоты.

1. Найдем k.

$$f(x) = kx + b + \alpha(x).$$

Разделим обе части равенства на x.

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x \to \infty$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k + 0 + 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k.$$

2. Найдем b.

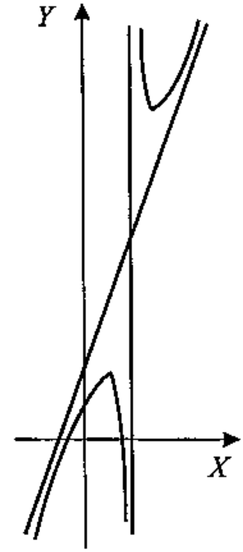
$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

$$b + \alpha(x) = f(x) - kx.$$

Переходя к пределу при $x \to \infty$, получим

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)\ .$$

Если $k = 0$ и $b \neq 0$, то наклонная асимптота становится горизонтальной.



Пример 4.7. $y = \dfrac{3x^2+1}{x-1}$.

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{3x^2+1}{x-1} = -\infty\ ,$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{3x^2+1}{x-1} = +\infty\ ,$$

$x = 1$ — вертикальная асимптота.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2+1}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x + \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}} = \infty,$$

горизонтальной асимптоты нет.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+1}{x^2 - x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3 + \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = 3,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2+1}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 1 - 3x^2 + 3x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3\ ,$$

$y = 3x + 3$ — наклонная асимптота.

4.18. Схема исследования функции

Приведем схему исследования поведения функции и построения ее графика.

1. Исследуем функцию $y = f(x)$.
   1) $D(y)$, $I(y)$;
   2) четность;
   3) периодичность;
   4) точки пересечения с осями;
   5) точки разрыва, поведение на бесконечности;

6) асимптоты.

2. Исследуем функцию $y' = f'(x)$.

1) промежутки монотонности,

2) экстремумы.

3. Исследуем функцию $y'' = f''(x)$.

1) выпуклость, вогнутость графика;

2) точки перегиба.

4. График.

Пример 4.8. $y = \ell^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. $y = \ell^{-\frac{x^2}{2}}$.

1) $D(y) = R, I(y) \subset (0; +\infty)$;

2) $f(-x) = \ell^{-\frac{x^2}{2}}$, $f(-x) = f(x)$, т.е. функция четная;

3) непериодическая;

4) пересечение с осью ОХ: $y = 0$, $\ell^{-\frac{x^2}{2}} \neq 0$,

ОУ: $x = 0, y = 1$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \ell^{-\frac{x^2}{2}} = 0$;

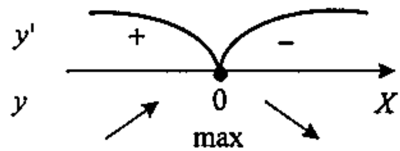
6) $y = 0$ — горизонтальная асимптота;

$k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ell^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = 0$ — наклонных асимптот нет.

2. $y' = \left(\ell^{\frac{x^2}{2}}\right)' = \ell^{\frac{x^2}{2}}(-x) = -x\ell^{-\frac{x^2}{2}}$.

$y' = 0$,

$-x\ell^{\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow x = 0$



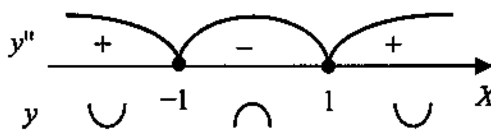
$x = 0$ — точка максимума,

$f_{\max}(x) = f(0) = 1$.

3. $y'' = \left(-x\ell^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -\ell^{-\frac{x^2}{2}} + x^2\ell^{-\frac{x^2}{2}} = \ell^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1)$,

$\ell^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) = 0$,

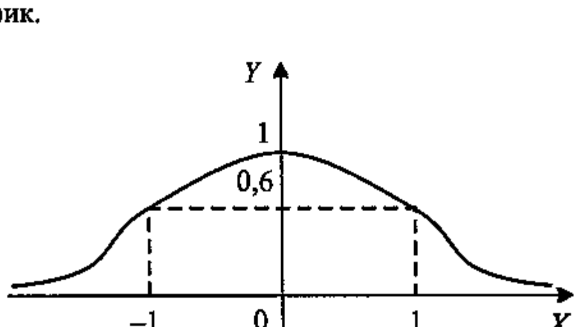
$x = \pm 1$.



$x = \pm 1$ — точки перегиба.

$f(-1) = f(1) = \ell^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \approx 0{,}6$.

4. График.



Таким образом, проведено полное исследование функции и построен ее график.

4.19. Применение понятия производной в экономике

4.19.1. Предельная себестоимость

Рассмотрим зависимость $C = f(Q)$ себестоимости C произведенной продукции от ее объема Q. Предельная себестоимость характеризует отношение прироста себестоимости ΔC к приросту объема продукции ΔQ при малом изменении объема продукции.

$$MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = f'(Q).$$

4.19.2. Эластичность спроса

Пусть $D = D(P)$ — функция спроса от цены товара P. Под эластичностью спроса понимается относительное изменение спроса при изменении цены товара на 1 %:

$$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}.$$

При непрерывной зависимости ΔD от ΔP удобно перейти к пределу при $\Delta P \to 0$:

$$E(D) = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta D(P) \cdot P}{\Delta P \cdot D(P)} = \frac{P}{D(P)} \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta D(P)}{\Delta P} = P \frac{D'(P)}{D(P)}. \quad (4.1)$$

Эластичность спроса можно представить в следующем виде:

$$E(D) = P(\ln D(P))'.$$

Из этого равенства следует, что эластичность спроса обладает свойствами логарифма:

$$E(D_1 D_2) = E(D_1) + E(D_2), \quad E(D_1 / D_2) = E(D_1) - E(D_2).$$

Так как $D(P)$ — убывающая функция, то $D'(P) < 0$. Из формулы (4.1) следует, что $E(D) < 0$.

Различают три вида спроса в зависимости от величины $|E(D)|$:

1) $|E(D)| > 1$ $(E(D) < -1)$ — спрос эластичен;
2) $|E(D)| = 1$ $(E(D) = -1)$) — спрос нейтрален;
3) $|E(D)| < 1$ $(E(D) > -1)$) — спрос неэластичен.

Найдем изменение выручки с увеличением цены товара при разных вариантах эластичности спроса. Выручка I равна произведению цены товара P на величину спроса D:

$$I(P) = D(P)\,P.$$

Найдем производную этой функции:

$$I'(P) = D(P) + PD'(P).$$

Выразим $D'(P)$ из формулы (4.1) и подставим в последнее равенство:

$$D'(P) = \frac{E(D)D(P)}{P},$$

$$I'(P) = D(P) + E(D)D(P) = D(P)(1 + E(D)).$$

Возможны случаи:

1) если $E(D) < -1$, то $I'(P) < 0$ — при эластичном спросе повышение цены товара ведет к снижению выручки;

2) если $E(D) = -1$, то $I'(P) = 0$ — при нейтральном спросе изменение цены не влияет на выручку;

3) если $E(D) > -1$, то $I'(P) > 0$ — при неэластичном спросе повышение цены товара приводит к росту выручки.

4.19.3. Максимизация прибыли

Пусть Q — количество реализованного товара, $R(Q)$ — функция дохода, $C(Q)$ — функция затрат на производство товара. Тогда прибыль от реализации товара выражается формулой

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q).$$

Чтобы прибыль была максимальной при некотором значении Q, должен выполняться необходимый принцип экстремума $\Pi'(Q) = 0$. Следовательно,

$$R'(Q) - C'(Q) = 0, \quad R'(Q) = C'(Q),$$

где $R'(Q) = \lim\limits_{\Delta Q \to 0} \dfrac{\Delta R(Q)}{\Delta Q}$ — предельный доход:

$C'(Q) = \lim\limits_{\Delta Q \to 0} \dfrac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}$ — предельные издержки.

Получено известное микроэкономическое утверждение: для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны.

4.19.4. Закон убывающей эффективности производства

Рассмотрим функцию, выражающую зависимость объема произведенной продукции V от капитальных затрат K. Характерный вид этой функции дается уравнением

$$V(K) = \frac{V_{\lim}}{1 + ae^{-bK+c}},$$

где a, b, c — известные положительные числа, определяемые структурой производства,
$V_{\lim}$ — предельно возможный объем выпускаемой продукции.

Найдем вторую производную данной функции.

$$V'(K) = V_{\lim}((1+ae^{-bK+c})^{-1})' = -V_{\lim}(1+ae^{-bK+c})^{-2}(-abe^{-bK+c}) =$$
$$= \frac{abV_{\lim}e^{-bK+c}}{(1+ae^{-bK+c})^2},$$

$$V''(K) = abV_{\lim}\left(\frac{e^{-bK+c}}{(1+ae^{-bK+c})^2}\right)' =$$
$$= abV_{\lim}\frac{-be^{-bK+c}(1+ae^{-bK+c})^2 - e^{-bK+c}2(1+ae^{-bK+c})(-abe^{-bK+c})}{(1+ae^{-bK+c})^4} =$$
$$= abV_{\lim}be^{-bK+c}\frac{2ae^{-bK+c} - 1 - ae^{-bK+c}}{(1+ae^{-bK+c})^3} = ab^2V_{\lim}e^{-bK+c}\frac{ae^{-bK+c} - 1}{(1+ae^{-bK+c})^3}.$$

Определим критическую точку второй производной из условия $V''(K) = 0$.

$$ae^{-bK+c} - 1 = 0, \;\; K_{кр} = \frac{c + \ln a}{b}.$$

Точка $K_{кр}$ является точкой перегиба графика функции:

1) при $K < K_{кр}$ $V''(K) > 0$ — график вогнутый, увеличение капитальных затрат приводит к интенсивному росту выпуска продукции.

2) при $K > K_{кр}$ $V''(K) < 0$ — график выпуклый, прирост объема выпуска продукции снижается, эффективность увеличения капитальных затрат падает.

График данной функции показан на рис. 4.8.

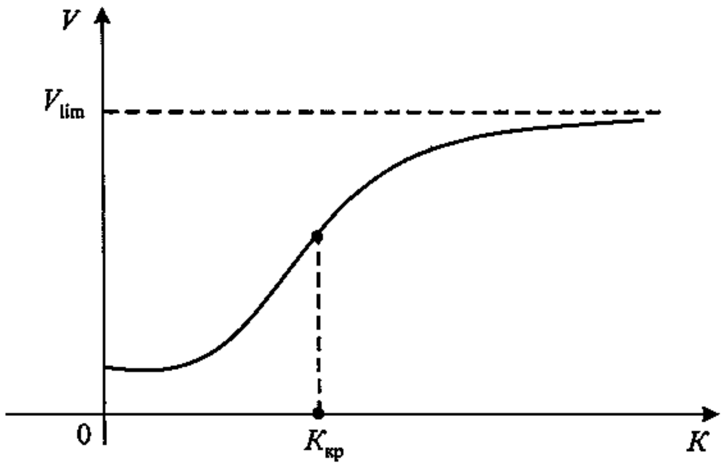


Рис. 4.8

В стратегии капиталовложений важно определить критический объем затрат, сверх которого дополнительные затраты будут приводить ко все меньшей отдаче при имеющейся структуре организации производства.

Глава 5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5.1. Первообразная. Неопределенный интеграл

Определение 5.1. Первообразной функцией $F(x)$ для функции $f(x)$ называется функция, производная которой равна исходной функции.

$$(F(x))' = f(x).$$

Теорема 5.1 **(теорема Коши).** Любая непрерывная на некотором множестве функция имеет на этом множестве первообразную.

Пример 5.1. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ так как $(x^3)' = 3x^2$. Функции $F_1(x) = x^3 + 3$ и $F_2(x) = x^3 - 2$ также являются первообразными функции $f(x)$. Любая функция вида $F(x) = x^3 + c$, где c — произвольное число, является первообразной функции $f(x)$.

Каждая функция может иметь бесконечно много первообразных, которые отличаются на постоянное слагаемое. Верно и обратное утверждение.

Теорема 5.2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, то они отличаются на постоянное слагаемое.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x).$$
$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$
$$\Phi(x) = C,$$
$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Определение 5.2. Совокупность всех первообразных данной непрерывной функции называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$, где $f(x)$ именуется подынтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ — подынтегральным выражением.

Если $F(x)$ — некоторая первообразная данной функции, то

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Процесс нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием данной функции, или взятием интеграла от данной функции.

Первообразные имеют следующий геометрический смысл.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $y = f(x)$. Найдем их производные в точке x_0 .

$$\left.\begin{array}{l} F_1'(x_0)=f(x_0) \\ F_2'(x_0)=f(x_0) \end{array}\right\}$$ касательные к графикам функций $y=F_1(x)$ и $y=F_2(x)$ в любой точке параллельны .

Следовательно, и сами графики будут располагаться параллельно (рис. 5.1).

На основании теоремы 5.2 $F_1(x)$ и $F_2(x)$ отличаются на постоянное слагаемое, следовательно, один график можно получить из другого сдвигом на C единиц вдоль оси OY.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

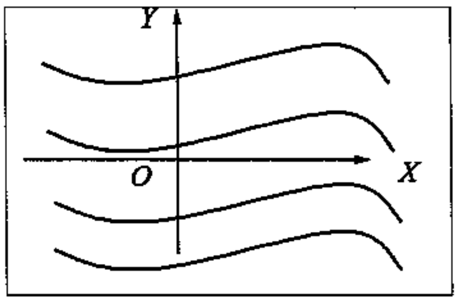


Рис. 5.1

Функция имеет бесконечно много первообразных, которые отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Графики всех первообразных представляют собой бесконечное семейство параллельных кривых.

5.2. Свойства неопределенного интеграла

<u>Теорема 5.3.</u> Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, тогда

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Найдем производную и дифференциал от обеих частей равенства.

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + c)' = f(x),$$

$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'\,dx = f(x)dx.$$

Теорема 5.4. Интеграл от дифференциала функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. $\int d\,f(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C.$

Из теорем 5.3 и 5.4 следует, что операции дифференцирования и интегрирования являются взаимнообратными.

Теорема 5.5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Умножим обе части на k.

$$k\int f(x)dx = k\,F(x) + C_1, \text{ где } C_1 = k\,C.$$

Найдем производную функции $kF(x)$.

$$(k\,F(x))' = k\,f(x).$$

Функция $k\,F(x)$ является первообразной функции $k\,f(x)$. Следовательно,

$$\int k\,f(x)dx = k\,F(x) + C,$$

$$\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Теорема 5.6. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx.$$

5.3. Таблица основных неопределенных интегралов

Теорема 5.7. Пусть функция $u = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T, а X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Функция $y = f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на множестве X и

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Тогда

$$\int f(u)du = F(u) + c.$$

Доказательство. Пусть $u = \varphi(x)$ — некоторая дифференцируемая функция.

$$(F(u))' = (F(\varphi(x)))' = f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

$F(u)$ является первообразной для функции $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$.

$$\int f(u)\,du = \int f(\varphi(x))d\,\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = F(u) + c.$$

Из теоремы следует, что в любом табличном интеграле можно заменить аргумент дифференцируемой функцией.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ \ n \neq -1;$ $\qquad \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$
2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c,$ $\qquad \int \frac{du}{u} = ln|u| + c;$
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$ $\qquad \int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + c,$ $\qquad \int \sin u du = -\cos u + c;$
5. $\int \cos x dx = \sin x + c,$ $\qquad \int \cos u du = \sin u + c;$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c,$ $\qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg}u + c;$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c,$ $\qquad \int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg}u + c;$
8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c,$ $\qquad \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{u}{a} + c;$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c,$ $\qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c;$
10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$ $\qquad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$ $\qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + c.$

Эти формулы легко доказываются дифференцированием правой части.

5.4. Непосредственное интегрирование

Этот вид интегрирования состоит в приведении исходного интеграла к одному или к нескольким табличным с помощью свойств интеграла и тождественных преобразований.

Пример 5.2. $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{3/2}-3x^{-1/2}\right)dx =$

$= \int x^{3/2}dx - 3\int x^{-1/2}dx = 2/5x^{5/2} - 6x^{1/2} + c$.

Пример 5.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx =$

$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + c$.

5.5. Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Теорема 5.8. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T, а X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве X, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. Найдем дифференциалы обеих частей равенства:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx = f(\varphi(t))d(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right) = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Дифференциалы обеих частей равны, значит, сами интегралы могут отличаться лишь на постоянное слагаемое.

При подходящем выборе функции $\varphi(t)$ интеграл становится значительно проще исходного интеграла.

Пример 5.4. $\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \begin{vmatrix} t = \sqrt[3]{x+1} \\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2dt \end{vmatrix} = \int (t^3-1)t3t^2dt =$

$$= 3\int(t^6 - t^3)dt = 3\int t^6 dt - 3\int t^3 dt = \frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{4} + c =$$

$$= \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + c.$$

Новую переменную можно не выписывать явно. В таких случаях говорят о введении постоянных и переменных под знак дифференциала или о тождественном преобразовании дифференциала.

Пример 5.5. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx = \int\ln^2 x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + c$,

$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$.

Пример 5.6. $\int\sin x \cdot \cos x \cdot dx = \int\sin x \cdot d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$,

$d(\sin x) = \cos x\, dx$.

5.6. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле

Теорема 5.9. Пусть функции u и v определены и дифференцируемы на некотором промежутке T и функция $du \cdot v$ имеет на этом промежутке первообразную. Тогда функция $u \cdot dv$ также имеет первообразную на промежутке T, причем справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Найдем дифференциал от произведения $u \cdot v$.

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства.

$$\int d(uv) = \int(du \cdot v + u \cdot d\,v).$$

$$uv = \int vdu + \int udv,$$

$\int udv = uv - \int vdu$ — формула интегрирования по частям.

С помощью этой формулы первообразная частично находится, и оставшиеся интегральные слагаемые, как правило, — проще исходного интеграла.

Данная формула применяется к интегралам следующих видов.

1) $$\int P(x)\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\\ a^x\end{Bmatrix}dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, его выбирают в качестве u.

2) $$\int P(x)\begin{Bmatrix}\log_a x\\ \text{arc}...x\end{Bmatrix}dx.$$

В качестве u выбирают трансцендентную функцию.

3) Циклические интегралы — это те, в которых подынтегральная функция представляется в виде произведения двух функций, мало меняющихся при интегрировании и дифференцировании.

Пример 5.7. $$\int(x^2+3)e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2+3 & du = 2xdx \\ dv = e^x dx & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2+3)e^x - 2\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2+3)e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx = (x^2+3)e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

Пример 5.8. $$\int x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx & v = \int dv = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c.$$

5.7. Интегрирование рациональных функций

Определение 5.3. Функция называется рациональной, если ее можно представить в виде дроби

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены.

Из класса всех дробей выделяют *основные простые дроби*:

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+2px+q},$$

где $a, p, q, M, N \in R$, $k \in N$.

Интегралы от первых двух типов простых дробей находятся с помощью подстановки $t = x - a$:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=\left|t=x-a,\ x=t+a, dx=dt\right|=A\int\frac{dt}{t}=A\ln|t|+c=A\ln|x-a|+c,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\left|t=x-a,\ x=t+a, dx=dt\right|=A\int t^{-k}dt=\frac{A}{1-k}t^{1-k}+c=$$

$$=\frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+c.$$

Интеграл от третьего типа простых дробей рассмотрим в предположении, что знаменатель не имеет корней, т.е. $q-p^2>0$. Выделим полный квадрат в знаменателе

$$x^2+2px+q=(x+p)^2+q-p^2=(x+p)^2+a^2,$$

где $a^2=q-p^2>0$.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+2px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{(x+p)^2+a^2}dx=\left|t=x+p, x=t-p, dx=dt\right|=$$

$$\int\frac{Mt-Mp+N}{t^2+a^2}dt=\frac{M}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+(N-Mp)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+$$

$$+\frac{N-Mp}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{N-Mp}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+c=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+2px+q)+\frac{N-Mp}{\sqrt{q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}+c.$$

Если степень числителя выше степени знаменателя, то дробь называется неправильной; в таком случае выполнив деление, получим

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $W(x)$ — некоторый многочлен, а второе слагаемое представляет собой правильную дробь, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

Например, рассмотрим неправильную дробь

$$\frac{x^5-3x^4+5x-2}{x^3+2x^2-x+1}.$$

Разделим числитель на знаменатель

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^5-3x^4 \qquad\qquad\qquad +5x-2 & x^3+2x^2-x+1 \\
x^5+2x^4-x^3+x^2 \qquad\qquad\quad & \overline{x^2-5x+11} \\
\hline
-\;-5x^4+x^3-x^2+5x-2 & \\
-5x^4-10x^3+5x^2-5x \quad & \\
\hline
-\;11x^3-6x^2+10x-2 & \\
11x^3+22x^2-11x+11 & \\
\hline
-28x^2+21x-13 &
\end{array}$$

и выделим целую часть дроби

$$\frac{x^5-3x^4+5x-2}{x^3+2x^2-x+1}=x^2-5x+11-\frac{28x^2-21x+13}{x^3+2x^2-x+1}.$$

Целая часть дроби легко интегрируется. Следовательно, вопрос об интегрировании рациональной функции сводится к вопросу об интегрировании правильных дробей. Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с помощью следующих теорем.

Теорема 5.10. Каждый многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами может быть представлен единственным образом в виде

$$Q(x)=A(x-a)^{k}(x-b)^{l}\cdots(x^2+2px+q)^{m}(x^2+2ux+v)^{n}\cdots, \quad (5.1)$$

где a, b, …, — корни многочлена кратности k, l, … ; квадратичные множители кратности m, n,… не имеют действительных корней.

Теорема 5.11. Пусть $R(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь, у которой знаменатель представлен в виде (5.1). Тогда эту дробь можно единственным образом представить в виде суммы простых дробей:

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{Q(x)}&=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\ldots\\&+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2px+q)^2}+\ldots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+2px+q)^m}+\ldots,\end{aligned}\quad (5.2)$$

где $A_1, A_2, ..., A_k, ..., M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_m, N_m, ...$ — некоторые действительные числа.

Выражение (5.2) называется разложением рациональной дроби на простые дроби, числа $A_1, A_2, ..., A_k, ..., M_1, N_1, M_2, N_2, .., M_m, N_m, ...$ — коэффициентами разложения.

Следствие. Пусть $R(x)/Q(x)$ — правильная рациональная дробь, у которой знаменатель — многочлен степени n, имеющий n различных действительных корней $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогда эту дробь можно единственным образом представить в виде суммы простых дробей:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}, \tag{5.3}$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ — некоторые действительные числа.

Для определения коэффициентов разложения используют *метод неопределенных коэффициентов*, который состоит в следующем: приводят левую часть равенства (5.2) или (5.3) к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях многочлена, полученного в числителе и многочлена $R(x)$.

Пример 5.9. Разложим дробь $\dfrac{3x-1}{x^2-3x+2}$ на простые дроби. Знаменатель имеет два корня — 1 и 2. Воспользуемся формулой (5.3).

$$\frac{3x-1}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2};$$

$$\frac{3x-1}{x^2-3x+2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)};$$

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 2A+B=1, \end{cases} \Rightarrow A=-2,\ B=5;$$

$$\frac{3x-1}{x^2-3x+2} = -\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-2}.$$

Пример 5.10. Разложим дробь $\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+x+2)}$ на простые дроби. Квадратичный множитель в знаменателе не имеет корней. Воспользуемся формулой (5.2).

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+2};$$

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+x+2)}=\frac{Ax^2+Ax+2A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+2)};$$

$$\begin{cases} A+B=1, \\ A-B+C=-2, \\ 2A-C=-3, \end{cases} \Rightarrow A=-1,\ B=2,\ C=1;$$

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+x+2)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+2}.$$

5.8. Интегрирование дробно-линейных иррациональных функций

1. Рассмотрим интеграл от рациональной функции

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$

где $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, $m \in \boldsymbol{N}$.

Подынтегральная функция сводятся к рациональной функции заменой

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \ x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a},\ \ dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}.$$

Пример 5.11.

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\left|t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},\ x=\frac{1+t^2}{t^2-1},\ dx=\frac{4t}{(t^2-1)^2}\right|=$$

$$=-4\int\frac{t^2dt}{(t^2-1)(t^2+1)}.$$

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь.

2. Интегралы вида

$$\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

сводятся к табличным выделением полного квадрата в подкоренном выражении и заменой переменной.

Пример 5.12. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx = \int \frac{2x+3}{\sqrt{(x+1)^2-2}}dx =$

$\left|t = x+1, x = t-1, dx = dt\right| = \int \frac{2t+1}{\sqrt{t^2-2}}dt =$

$= \int (t^2-2)^{-1/2} d(t^2-2) + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = 2\sqrt{t^2-2} + \ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + c =$

$= 2\sqrt{x^2+2x-1} + \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right| + c.$

5.9. Интегрирование тригонометрических выражений

5.9.1. Интегралы от произведений синуса и косинуса разных аргументов

$$\int \sin mx \cos nx \, dx,$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx,$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx.$$

Данные интегралы сводятся к табличным с помощью формул преобразования произведения в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta = 1/2(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = 1/2(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = 1/2(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 5.13. $\int \sin 6x \cos 2x \, dx = \int \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 8x)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\int \sin 4x \, d(4x) + \frac{1}{2}\frac{1}{8}\int \sin 8x \, d(8x) = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{16}\cos 8x + c.$

5.9.2. Интегралы от степеней синуса и косинуса одного аргумента

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

1. Если хотя бы одно из чисел m и n нечетно, то от нечетной степени отделяют один сомножитель и вносят его под знак дифференциала. Подынтегральную функцию приводят к одной из тригонометрических функций.

Пример 5.14. $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \, \underline{\sin x \, dx} =$
$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x \, d(\cos x) = -\int \cos^4 x \, d(\cos x) + 2\int \cos^6 x \, d(\cos x) -$
$- \int \cos^8 x \, d(\cos x) = -\dfrac{\cos^5 x}{5} + \dfrac{2\cos^7 x}{7} - \dfrac{\cos^9 x}{9} + c$.

2. Обе степени четные. В этом случае применяют формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \ \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

до тех пор, пока не появятся нечетные степени тригонометрических функций.

5.9.3. Интегралы от рациональной функции, содержащей синус и косинус

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Этот интеграл рационализируется универсальной подстановкой

$$t = \operatorname{tg} x/2, \quad 0 < x < \pi;$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ x = 2\operatorname{arctg} t, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 5.15. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sin x} dx = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(2+\frac{2t}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} =$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} + c.$$

5.10. Определенный интеграл

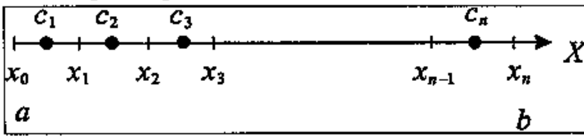
Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна (следовательно, ограничена) на $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Длину i -го отрезка разбиения обозначим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = \overline{1,n}\,.$$

Внутри i-го отрезка разбиения выберем по произвольной точке c_i



и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n\,. \qquad (5.4)$$

Определение 5.4. Сумма вида (5.4) называется интегральной суммой функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$.

Определение 5.5. Если существует конечный предел интегральных сумм вида (5.4) при уменьшении длин отрезков разбиения, то он не зависит от способов разбиения отрезка. Этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{i=0}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\,.$$

5.11. Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками, в каждом отрезке разбиения возьмем по точке c_i и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i\,. \qquad (5.5)$$

Выясним, что представляет собой геометрически интегральная сумма (рис. 5.2).

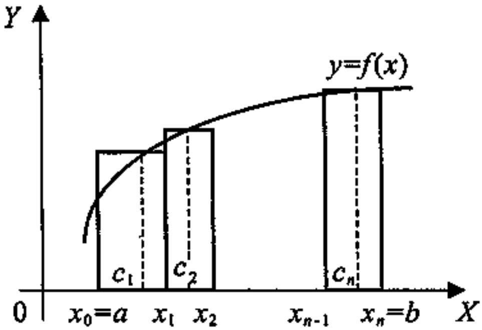


Рис. 5.2

Из рисунка видно, что интегральная сумма равна площади ступенчатой фигуры, ограниченной ломаной, вписано-описанной около графика функции. При измельчении длин отрезков разбиения площадь этой фигуры будет неограниченно приближаться к площади фигуры, заключенной между графиком функции и осью ОX на отрезке $[a,b]$.

С другой стороны, предел интегральной суммы вида (5.5) при измельчении длин отрезков разбиения равен определенному интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, следовательно, определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, заключенной между графиком функции и осью ОX на отрезке $[a,b]$.

5.12. Свойства определенного интеграла

Справедливы следующие свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0,$ $\qquad \int\limits_a^b 0\cdot dx = 0.$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx\,.$

3. Если функция $y = f(x)$ интегрируема по большему из промежутков $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$, то она интегрируема по двум другим промежуткам, причем выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

независимо от расположения точек *a, b, c* (рис. 5.3).

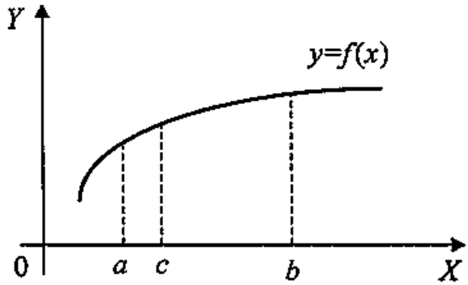


Рис. 5.3

Доказательство. *__1. Случай $a<c<b$.__* Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a,b]$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 <...< c <... < x_n = b.$$

Очевидно, что для интегральных сумм будет выполняться следующее равенство:

$$\sum_a^b f(c_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(c_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(c_i)\Delta x_i .$$

Переходя к пределу при измельчении длин отрезков разбиения, получим требуемое равенство.

__2. Случай $c<a<b$.__ Согласно случаю 1

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx .$$

Используя свойство 2, получим

$$\int_c^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \text{, отсюда}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx .$$

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n kf(c_i)\Delta x_i = k\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx .$$

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то и их алгебраическая сумма также интегрируема по $[a,b]$, причем интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов.

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

Это равенство непосредственно следует из равенства для интегральных сумм.

$$\sum_{i=1}^n (f(c_i)\pm g(c_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^n g(c_i)\Delta x_i .$$

6. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt .$$

В каждой точке непрерывности функции $f(x)$ функция $\Phi(x)$ имеет производную, которая равна $f(x)$ (рис. 5.4).

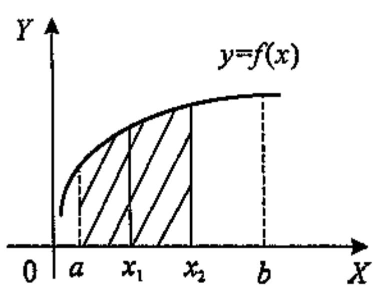


Рис. 5.4

$\Phi'(x) = f(x)$, т. е. $\Phi(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

5.13. Вычисление определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, тогда функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$ будет являться первообразной. Пусть $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$. Тогда по свойству первообразных $\Phi(x) = F(x) + C$. Найдем C.

$$\left.\begin{array}{c} \Phi(a) = \int\limits_a^a f(x)dx = 0, \\ \Phi(a) = F(a) + C. \end{array}\right\} \Rightarrow C = -F(a).$$

Следовательно, $\Phi(x) = F(x) - F(a)$.

Найдем $\Phi(b)$:

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b F(x)dx,$$

$$\Phi(b) = F(b) - F(a).$$

Из двух последних равенств следует, что

$\int\limits_a^b f(x)d\,x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ — формула Ньютона-Лейбница.

С помощью этой формулы вычисляется определенный интеграл, если известна любая первообразная подынтегральной функции.

5.14. Интегрирование по частям и метод замены переменной в определенном интеграле

1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Проинтегрируем равенство для дифференциалов $d(u\,v) = vd\,u + ud\,v$ по отрезку $[a,b]$.

$$\int\limits_a^b d(u\,v) = \int\limits_a^b vd\,u + \int\limits_a^b ud\,v,$$

$$uv\Big|_a^b=\int_a^b vdu+\int_a^b udv,$$

$$\int_a^b ud\,v=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu,$$

— формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Эта формула применяется к тем же типам интегралов, которые были рассмотрены в неопределенном интеграле.

2. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке она имеет первообразную $F(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ является дифференцируемой функцией на $[\alpha,\beta]$ и ее производная непрерывна на $[\alpha,\beta]$. Она переводит отрезок $[\alpha,\beta]$ в $[a,b]$.

$$\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow[a,b].$$

$\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$ (концы переводит в концы).

Тогда справедлива формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. $(F(\varphi(t)))'=f(\varphi(t))\varphi'(t)$,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

Пример 5.16. $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=e^x dx & v=\int dv=\int e^x dx=e^x\end{matrix}\right|=$

$$=e^x x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-(e-1)=1.$$

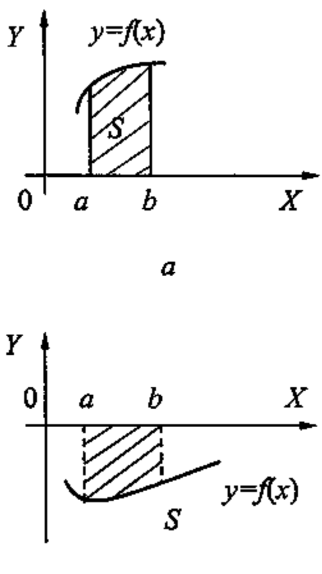
Пример 5.17. $\int\limits_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx = \left| \begin{array}{c} t=\sqrt{2x+1} \\ x=\dfrac{t^2-1}{2} \\ dx = tdt \\ \begin{array}{|c|c|c|} x & 0 & 4 \\ \hline t & 1 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int\limits_1^3 \dfrac{t^2-1}{2}\cdot t\cdot tdt =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^3 t^4\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_1^3 t^2\,dt = \frac{t^5}{10}\Big|_1^3 - \frac{t^3}{6}\Big|_1^3 = \frac{243}{10} - \frac{1}{10} - \frac{27}{6} + \frac{1}{6} = \frac{298}{15}.$$

5.15. Приложения определенного интеграла

5.15.1. Вычисление площадей фигур, расположенных под (над) графиком функции на некотором отрезке.

Это приложение вытекает из геометрического смысла определенного интеграла.



$$S = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

а

$$S = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

б

Рис. 5.5

5.15.2. Вычисление площади фигур, ограниченных графиками двух функций на некотором отрезке

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx =$$

$$= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

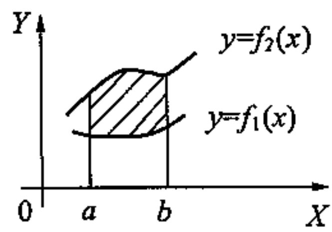


Рис. 5.6

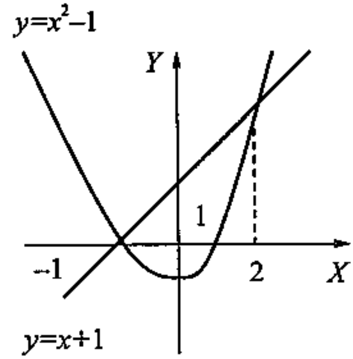
где S_1 и S_2 — площади криволинейных трапеций под графиками функций

$y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

Пример 5.18.

$y = x^2 - 1,$

$y = x + 1.$



Найдем абсциссы точек пересечения.

$x^2 - 1 = x + 1,$

$x^2 - x - 2 = 0,$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -1.$

$$\int_{-1}^{2}(x + 1 - x^2 + 1)dx = \int_{-1}^{2}(x - x^2 + 2)dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{2} dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx + \int_{-1}^{2} x dx = 2x\Big|_{-1}^{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 4{,}5.$$

5.15.3. Вычисление объемов тел, полученных от вращения графика функции вокруг оси *OX*

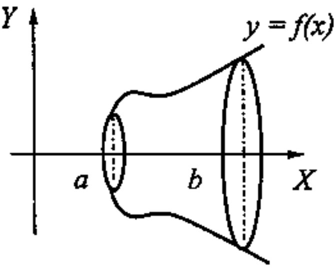
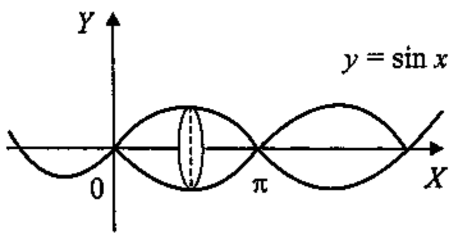


Рис. 5.7

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример 5.19. $y = \sin x$, $x \in [0,\pi]$.



$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot x \Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{4}(0-0) = \frac{\pi^2}{2}.$$

5.15.4. Вычисление объемов тел, полученных от вращения графика функции вокруг оси *OY*

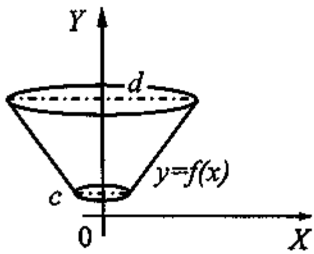
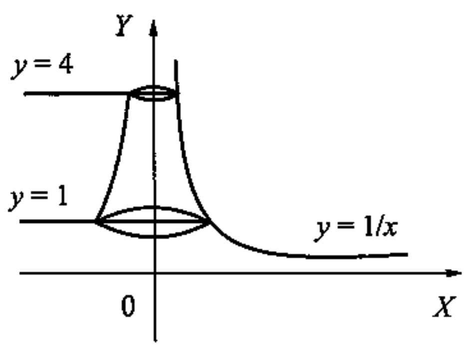


Рис. 5.8.

$$V = \pi \int_c^d (f^{-1}(y))^2 dy,$$

где $x = f^{-1}(y)$ — обратная функция к функции $y = f(x)$.

Пример 5.20. $y = \dfrac{1}{x}$, $y \in [1,4]$.



$$V = \pi \int_1^4 \frac{dy}{y^2} = \pi \int_1^4 y^{-2} dy = \frac{\pi}{-1} y^{-1} \Big|_1^4 = \frac{-\pi}{y} \Big|_1^4 = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

5.16. Приближенное вычисление определенного интеграла

В некоторых случаях не удается точно найти значение определенного интеграла. Тогда его вычисляют приближенно.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ (рис. 5.9).

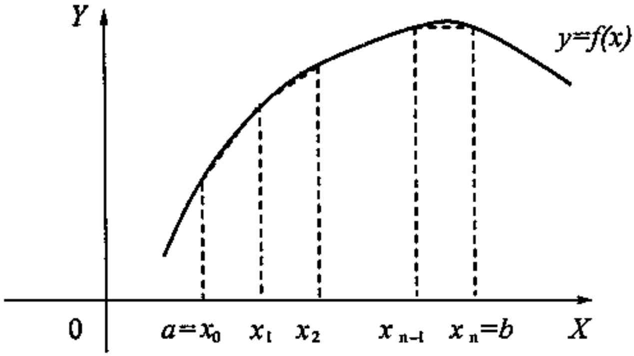


Рис. 5.9

Разобьем отрезок на n равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots . < x_n = b.$$

Обозначим длину отрезка разбиения — Δx. Мы получаем фигуру, ограниченную ломаной линией, которая с ростом n будет все точнее давать значения площади S криволинейной трапеции. Найдем площадь этой фигуры.

$$S \approx S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\Delta x + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\Delta x + \ldots$$

$$+ \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\Delta x = \Delta x\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right),$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right).$$

Мы получили формулу трапеций для приближенного вычисления интеграла.

5.17. Несобственные интегралы

При определении определенного интеграла предполагалось, что:

1) отрезок интегрирования конечен;
2) функция непрерывна на отрезке интегрирования.

Если нарушено одно из этих условий, то определенный интеграл называется несобственным, причем если отрезок интегрирования неограничен, то интеграл называется несобственным интегралом *первого рода*, если же функция не ограничена на отрезке интегрирования, то несобственным интегралом — *второго рода*.

С геометрической точки зрения, несобственные интегралы выражают площади неограниченных фигур.

5.18. Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a,\infty)$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

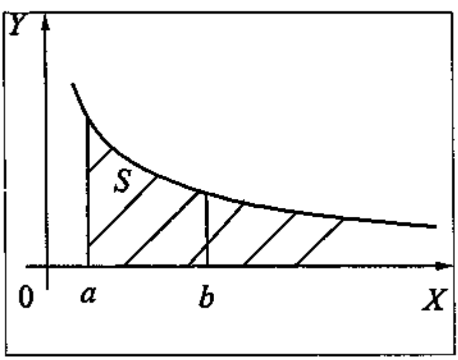


Рис. 5.10

Вычисление несобственного интеграла можно свести к вычислению обычного определенного интеграла и нахождению предела ($b \to \infty$).

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx .$$

Если предел, стоящий справа, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся и он равен значению этого предела. В противном случае интеграл называется расходящимся.

Пусть $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$, тогда

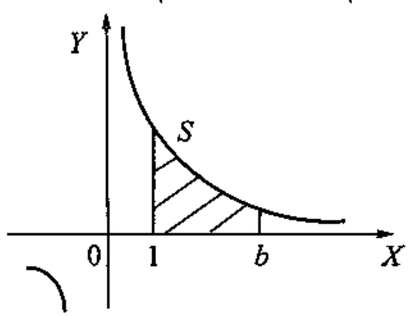
$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty}(F(b) - F(a)) = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a) .$$

Обозначим $\lim\limits_{b\to\infty} F(b) = F(\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a)$ — обобщенная формула Ньютона-Лейбница (для вычисления несобственного интеграла).

Пример 5.21.

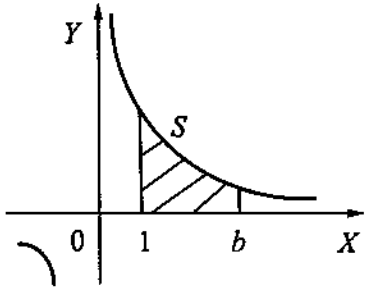
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3}dx = -\lim_{b\to\infty}\frac{x^{-2}}{2}\Bigg|_1^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x^2}\Bigg|_1^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$



Интеграл сходится и равен $\frac{1}{2}$.

Пример 5.22. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-\frac{1}{3}}dx = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_1^b = \frac{3}{2}\lim\limits_{b\to\infty}\sqrt[3]{x^2}\Bigg|_1^b =$

$= \frac{3}{2}\lim\limits_{b\to\infty}(\sqrt[3]{b^2} - 1) = \infty .$



Интеграл расходится.

Аналогично определяются несобственные интегралы первого рода по другим неограниченным промежуткам.

Рассмотрим интеграл по промежутку $(-\infty;b]$.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}(F(b)-F(a)) = F(b)-F(-\infty).$$

Рассмотрим интеграл по промежутку $(-\infty;+\infty)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Данный интеграл сводится к предыдущим двум типам. Возьмем произвольную точку c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

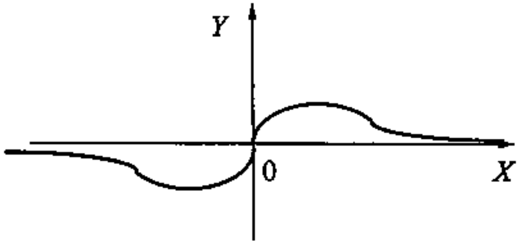
Если оба предела, стоящие в правой части, существуют и конечны, то несобственный интеграл называют сходящимся, а иначе — расходящимся.

Пример 5.23.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{-x^2}d(-x^2) + (-\frac{1}{2})\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x^2}d(-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\lim_{a\to-\infty} e^{-x^2}\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} e^{-x^2}\Big|_{0}^{b}) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\lim_{a\to-\infty}(1-e^{-a^2}) + \lim_{b\to\infty}(e^{-b^2}-1)) = \frac{-1}{2}(1+(-1)) = 0.$$



Данный интеграл сходится и равен нулю.

5.19. Несобственные интегралы второго рода

Если функция не ограничена на промежутке интегрирования и промежуток интегрирования конечен, то определенный интеграл является несобственным интегралом второго рода.

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b)$ и в окрестности точки b функция не ограничена (рис. 5.11).

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,.$$

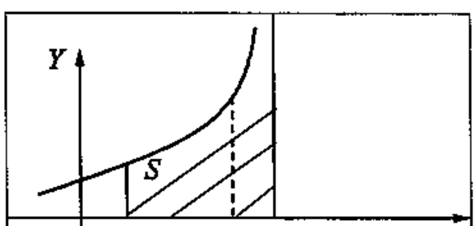


Рис. 5.11

Если предел, стоящий справа, существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся и равен значению этого предела, в противном случае интеграл называется расходящимся.

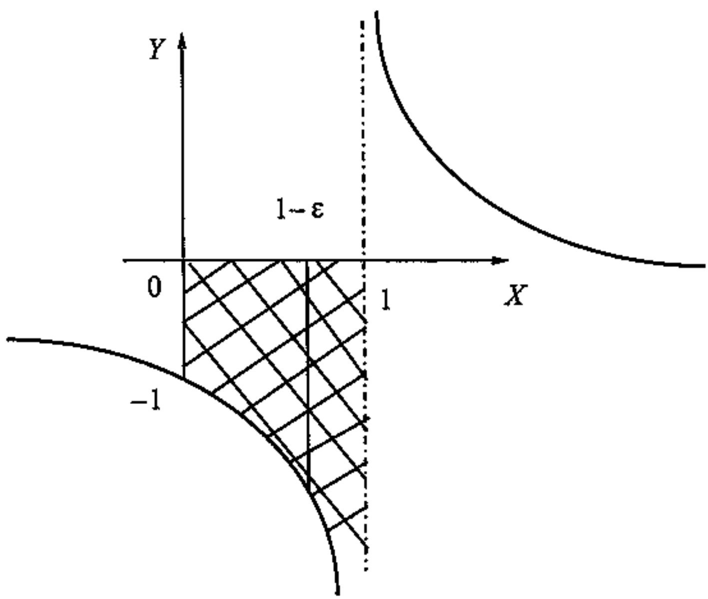
Если $F(x)$ — первообразная функции, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(F(b-\varepsilon)-F(a)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon)-F(a).$$

Пример 5.24.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-\frac{1}{5}}d(x-1) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{5}{4}(x-1)^{\frac{4}{5}}\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{5}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt[5]{(x-1)^4}\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{5}{4}\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt[5]{(-\varepsilon)^4}-1\Big) = -\frac{5}{4}.$$



Несобственный интеграл сходится.

2. Аналогично определяются интегралы второго рода в других ситуациях (рис. 5.12): $y = f(x)$ определена и непрерывна на $(a,b]$ и в окрестности точки a не ограничена.

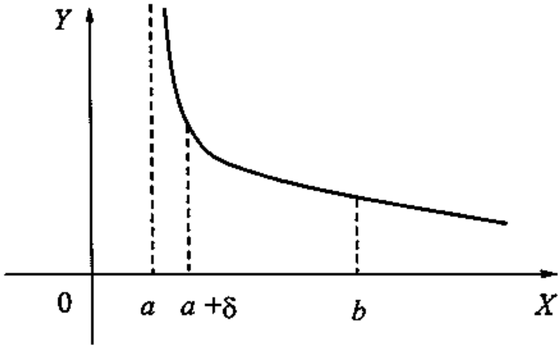


Рис. 5.12

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} F(x)\Big|_{a+\delta}^b = \lim_{\delta\to 0}(F(b) - F(a+\delta)) = F(b) - \lim_{\delta\to 0} F(a+\delta)$$

3. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a,c) \cup (c,b]$ и в окрестности точки c функция неограниченна (рис. 5.13).

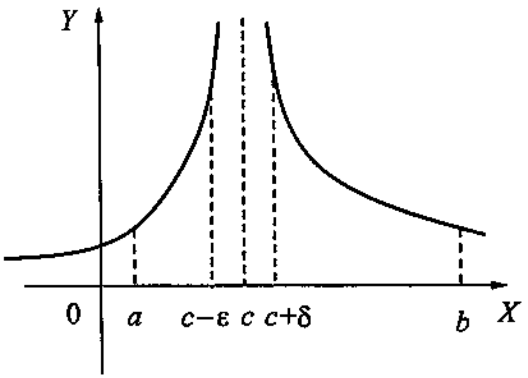


Рис. 5.13

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)dx\,.$$

Если оба предела, стоящие в правой части, существуют и конечны, то несобственный интеграл называется сходящимся и он равен сумме этих пределов, в противном случае — расходящимся.

Замечание 1. Несобственные интегралы могут быть комбинированного типа: первого и второго рода; или второго рода с несколькими точками разрыва второго рода.

Замечание 2. Если функция на отрезке интегрирования терпит разрыв первого рода в точке c, то определенный интеграл от нее по этому отрезку не является несобственным, т.к. его можно свести к сумме двух обычных определенных интегралов.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

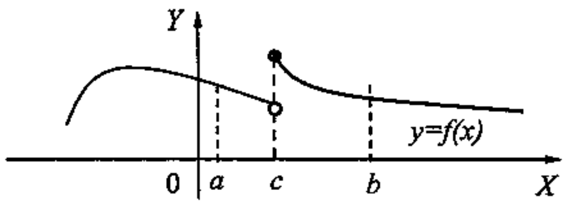


Рис. 5.14.

5.20. Некоторые приложения определенного интеграла в экономике

5.20.1. Темп роста выпуска оборудования

Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста его выпуска

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{y},$$

где Δy — прирост выпуска оборудования за промежуток времени Δt,
y — уровень его производства на момент времени t.

Найдем общее количество оборудования, произведенного к моменту времени t, полагая, что K — известная постоянная, единицей времени является год и в начальный момент времени $t=0$ уровень ежегодного производства оборудования составлял y_0.

Будем считать, что y является непрерывной функцией от t. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$.

$$K = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y} = \frac{y'}{y} = (\ln y)'.$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от 0 до t.

$$\int_0^t K dt = \int_{y_0}^{y} (\ln y)' dy ,$$

$$Kt\Big|_0^t = \ln y\Big|_{y_0}^{y}, \quad Kt = \ln \frac{y}{y_0}, \;\; y = y_0 e^{Kt}.$$

Суммарное количество оборудования, выпущенного за время t, находится определенным интегралом

$$Y(t) = \int_0^t y(t) dt = \int_0^t y_0 e^{Kt} dt = \frac{y_0}{K} e^{Kt}\Big|_0^t = \frac{y_0}{K}(e^{Kt} - 1).$$

Пример 5.25. При ежегодном темпе роста 5% ($K = 0{,}05$) общее количество оборудования, выпущенного за 10 лет, составит

$$Y(10) = 20 y_0 (e^{0,5} - 1) \approx 13 y_0 .$$

5.20.2. Задача дисконтирования

Задача дисконтирования состоит в определении начальной суммы S через время t по ее конечной величине S_t при процентной ставке p.

При непрерывном начислении процента конечная сумма вычисляется по формуле

$$S_t = Se^{rt} ,$$

где $r = p/100$.

Если сумма S_t также является функцией времени $S_t = f(t)$, то дисконтированная сумма к моменту времени t составит

$$f(t) = Se^{rt}, \;\; S = f(t)e^{-rt} .$$

Полная дисконтированная сумма за время t вычисляется по формуле

$$S_{\text{d}} = \int_0^t f(t)e^{-rt}dt\,.$$

Пример 5.26. Определить дисконтированную сумму S_d при $f(t) = S_0(1 + kt)$, где S_0 — начальные капиталовложения, k — ежегодная доля их увеличения.

Другими словами, при заданных p и k требуется оценить, что выгоднее: наращивать капиталовложения или вложить их одновременно при непрерывно начисляемой процентной ставке.

$$S_{\text{d}} = \int_0^t S_0(1+kt)e^{-rt}dt = S_0(-\frac{1}{r}e^{-rt}\Big|_0^t - \frac{k}{r}\int_0^t td(e^{-rt})) =$$

$$= S_0(\frac{1}{r}(1-e^{-rt}) - \frac{k}{r}te^{-rt}\Big|_0^t + \frac{k}{r}\int_0^t e^{-rt}dt) =$$

$$= S_0\left(\frac{1}{r}(1+\frac{k}{r}) - \frac{1}{r}(1+kt+\frac{k}{r})e^{-rt}\right).$$

$$S_{\text{d}} = \frac{S_0}{r}\left((1+\frac{k}{r}) - (1+kt+\frac{k}{r})e^{-rt}\right).$$

Из полученной формулы следует, что:

1) чем выше процентная ставка p (а значит, r), тем меньше дисконтная сумма S_d и, следовательно, выше доход. Если рассматривать S_d как дисконтный доход, то увеличение процентной ставки p снижает рентабельность помещения капитала;

2) увеличение интенсивности ежегодных капиталовложений k приводит к увеличению S_d;

3) при неизменных k и p дисконтный доход растет с увеличением промежутка времени t.

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Понятие о дифференциальном уравнении

Определение 6.1. Уравнение, содержащее независимую переменную, функцию от этой независимой переменной и ее производные различных порядков, называется дифференциальным уравнением.

Определение 6.2. Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Определение 6.3. Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если неизвестная функция и все ее производные входят в него в первой степени. Общий вид линейного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = f(x). \qquad (6.1)$$

Определение 6.4. Линейное дифференциальное уравнение (6.1) называется однородным, если $f(x) \equiv 0$, и неоднородным — в противном случае.

Примеры дифференциальных уравнений:

$y'' - \sin x\, y' + (\cos x)\, y = \operatorname{tg} x$ — линейное,
$\sin y' - \cos y = \operatorname{ctg} x$ — нелинейное,
$y''' - y' = 0$ — линейное,
$(y^{IV})^2 - 3y''' + y = 1$ — нелинейное.

Определение 6.5. Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой в уравнение будет получено тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения, график решения называют интегральной кривой.

Пример 6.1. $y' - f(x) = 0,$
$y' = f(x),$
$y = \int f(x)dx + C.$

Пример 6.2. $y'' = 0,$
$y' = C_1$
$y = C_1x + C_2.$

Определение 6.6. Решение дифференциального уравнения n-го порядка, содержащее n произвольных постоянных, называется общим решением дифференциального уравнения.

Определение 6.7. Если в результате интегрирования дифференциального уравнения получена зависимость между y и x, из которой не удается явно выразить y через x (т.е. неизвестная функция задана неявно), то данную зависимость называют общим интегралом дифференциального уравнения.

Определение 6.8. Решение, полученное из общего при конкретных значениях произвольных постоянных, называется частным решением.

Пример 6.3.
$y'' + y = 0.$
$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ — общее решение.
$y_1 = 3 \cos x - 2 \sin x$ — частное решение.

6.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называют уравнения вида

$$X_1(x)\, Y_1(y)dx + X_2(x)\, Y_2(y)dy = 0.$$

Перенесем второе слагаемое в правую часть.

$$X_1(x)\, Y_1(y)dx = -X_2(x)\, Y_2(y)dy.$$

Предположим, что $Y_1(y)\, X_2(x) \neq 0$. Разделим обе части уравнения на это произведение:

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx = -\frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy.$$

Переменные разделились. Интегрируя обе части этого равенства, получим общее решение уравнения:

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx = -\int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy.$$

Пример 6.4. $y' - \frac{y}{x} = 0$.

$dy = y'\,dx,\ y' = \frac{dy}{dx}$.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$,

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$,

$\ln|y| = \ln|x| + C$, $y, x > 0$.

$y = e^{\ln x + c}$,

$y = c_1 \cdot e^{\ln x}$, $c_1 = e^c$,

$y = c_1 x$ — общее решение уравнения.

6.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x) = 0, \qquad (6.2)$$

$$a(x) \neq 0.$$

Разделим обе части уравнения на $a(x)$.

$$y' + p(x)\,y + q(x) = 0,. \qquad (6.3)$$

где $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$, $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$

Будем искать решения уравнения (6.3) в виде произведения двух неизвестных функций:

$$y = u \cdot v.$$

Подставим $y = u \cdot v$ в (6.3)

$$u'v + v'u + p(x)uv + q(x) = 0,$$

$$v(u' + p(x)u) + v'u + q(x) = 0. \qquad (6.4)$$

Выберем функцию u так, чтобы $u'+p(x)u=0$:

$$\frac{du}{dx}=-p(x)u\ ,$$

$$\frac{du}{u}=-p(x)dx\ ,$$

$$\int\frac{du}{u}=\int(-p(x))dx\ ,$$

$$\ln u=-\int p(x)dx\ ,$$

$$u=e^{-\int P(x)dx}.$$

Подставим полученную функцию $u(x)$ в (6.4) и найдем $v(x)$:

$$v'e^{-\int P(x)dx}+q(x)=0\ ,$$

$$\frac{dv}{dx}\cdot e^{-\int P(x)dx}=-q(x)\ ,$$

$$dv=-q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\ ,$$

$$\int dv=-\int q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\ ,$$

$$v=-\int q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\ .$$

Подставим функции $u(x)$ и $v(x)$ в выражение для y:

$y=u\cdot v=(-\int q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C)\cdot e^{-\int P(x)dx}$ — общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 6.5. $xy'-y-x-1=0$.

$y'-\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$,

$y=u\cdot v$,

$u'v+v'u-\frac{uv}{x}=\frac{x+1}{x}$,

$v(u'-\frac{u}{x})+v'u=\frac{x+1}{x}$,

$u'-\frac{u}{x}=0$,

$$\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}, \qquad \frac{du}{u}=\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{du}{u}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln u=\ln x,$$

$$u=x.$$

$$v'x=\frac{x+1}{x}, \qquad \frac{dv}{dx}=\frac{x+1}{x^2}, \qquad dv=\frac{x+1}{x^2}dx,$$

$$\int dv=\int\frac{x+1}{x^2}dx,$$

$$v=\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}dx,$$

$$v=\ln x-\frac{1}{x}+C.$$

$$y=u\cdot v=x(\ln x-\frac{1}{x}+C),$$

$y=x\ln x+Cx-1$ — общее решение уравнения.

6.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнения вида: $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$, где a_0, a_1, a_2 — некоторые числа. Будем искать решение этого уравнения в виде $y=e^{kx}$. Разделим обе части уравнения на $a_0\neq 0$.

$$y''+py'+q\cdot y=0,$$

где $q=\frac{a_2}{a_0}$, $p=\frac{a_1}{a_0}$.

Подставим в уравнение выражение для y:

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0,$$

$$e^{kx}(k^2+pk+q)=0,\ e^{kx}\neq 0.$$

Следовательно, $k^2+pk+q=0$. Это уравнение называется *характеристическим уравнением* данного дифференциального уравнения. Найдем дискриминант этого уравнения

$$D=p^2-4q.$$

При этом возможны следующие случаи.

1. $D > 0$. Уравнение имеет два различных корня k_1, k_2. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. $D = 0$. Уравнение имеет два одинаковых корня $k_1 = k_2$. Общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}.$$

3. $D < 0$. Найдем два параметра $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}$. Общее решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

6.5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \tag{6.5}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0. \tag{6.6}$$

<u>Теорема 6.1.</u> Общее решение неоднородного уравнения (6.5) можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения (6.6) и любого частного решения неоднородного уравнения (6.5).

Доказательство.

Пусть $\tilde{y}$ — общее решение однородного уравнения (6.6). Так как это уравнение второго порядка, то это решение зависит от двух произвольных постоянных. Пусть $\hat{y}$ — какое-либо частное решение неоднородного уравнения (6.5). Покажем, что их сумма $y = \tilde{y} + \hat{y}$ является общим решением неоднородного уравнения (6.5).

Функция y зависит от двух произвольных констант. Подставим y в (6.5).

$$a(x)(\tilde{y}'' + \hat{y}'') + b(x)(\tilde{y}' + \hat{y}') + c(x)(\tilde{y} + \hat{y}) = f(x),$$

$$a(x)\widetilde{y}''+b(x)\widetilde{y}'+c(x)\widetilde{y}+a(x)\hat{y}''+b(x)\hat{y}'+c(x)\hat{y}=f(x),$$
$$0+f(x)=f(x).$$

Таким образом, y является решением неоднородного уравнения (6.5) и так как оно зависит от двух произвольных постоянных, то y является общим решением неоднородного уравнения (6.5).

Для того чтобы найти общее решение неоднородного уравнения, надо найти общее решение соответствующего однородного и какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Для уравнения с постоянными коэффициентами частное решение неоднородного уравнения подбирается по виду правой части $f(x)$:

1) если $f(x)$ — многочлен, то частное решение ищут в виде многочлена той же степени с неизвестными коэффициентами;

2) если $f(x)$ зависит от синуса и косинуса одного аргумента, то частное решение ищут в виде суммы синуса и косинуса этого же аргумента с неизвестными коэффициентами;

3) если в правой части — показательная функция, умноженная на многочлен, то частное решение ищут в виде произведения многочлена той же степени с неизвестными коэффициентами, умноженного на показательную функцию с тем же аргументом, что и в уравнении.

Пример 6.6. $y''-5y'+4y=\sin 3x$ — неоднородное уравнение.

$y''-5y'+4y=0$ — соответствующее ему однородное уравнение.

$k^2-5k+4=0$, $\qquad k_1=1$, $k_2=4$.

$\widetilde{y}=C_1e^x+C_2e^{4x}$ — общее решение однородного уравнения.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$\hat{y}=a\sin 3x+b\cos 3x.$$

Подставим эту функцию в неоднородное уравнение:

$$\hat{y}'=3a\cos 3x-3b\sin 3x,$$

$$\hat{y}''=-9a\sin 3x-9b\cos 3x,$$

$$-9a\sin 3x-9b\cos 3x-15a\cos 3x+15b\sin 3x+4a\sin 3x+4b\cos 3x=$$
$$=\sin 3x,$$

$$\sin 3x(-9a+15b+4a)+\cos 3x(-9b-15a+4b)=1\cdot\sin 3x+0\cdot\cos 3x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$.

$$\begin{cases} -5a+15b=1, \\ -5b-15a=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-3a, \\ -5a-45a=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-3a, \\ -50a=1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{50}, \\ b=\dfrac{3}{50}. \end{cases}$$

$\hat{y}=-\dfrac{1}{50}\sin 3x+\dfrac{3}{50}\cos 3x$ — частное решение неоднородного уравнения.

$y=C_1e^x+C_2e^{4x}-\dfrac{1}{50}\sin 3x+\dfrac{3}{50}\cos 3x$ — общее решение неоднородного уравнения.

6.6. Применение аппарата дифференциальных уравнений в экономике

Рассмотрим *модель естественного роста выпуска*. Предположим, что некоторая продукция продается по фиксированной цене P. Обозначим через $Q(t)$ количество продукции, реализованное на момент времени t. Получен доход $PQ(t)$. Часть дохода расходуется на инвестиции в производство:

$$I(t)=mPQ(t), \tag{6.7}$$

где m — норма инвестиций, $0<m<1$.

Если рынок не насыщен, то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять пойдет на инвестиции в производство. Это приведет к росту скорости выпуска (акселерации), причем скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций:

$$Q' = lI(T), \qquad (6.8)$$

где $1/l$ — норма акселерации.

Подставляя (6.8) в (6.7) получим дифференциальное уравнение

$$Q' = kQ,$$

где $k = lmP$.

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид

$$Q = Ce^{kt},$$

где C — произвольная постоянная.

Если в начальный момент времени $t = t_0$ задан объем выпуска Q_0, то из этого условия можно найти C.

$$Q_0 = Ce^{kt_0}, \quad C = Q_0 e^{-kt_0}.$$

Можно записать частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Глава 7

РЯДЫ

7.1. Числовые ряды

Пусть дана последовательность действительных положительных чисел

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Определение 7.1. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом с положительными членами.

a_1 — 1-й член ряда,

a_2 — 2-й член ряда,

...

a_n — n-й член ряда, и т.д.

Определение 7.2. Сумма первых k членов числового ряда называется k-й частичной суммой ряда и обозначается S_k.

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

...

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$,

и т.д.

Определение 7.3. Если существует конечный предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то числовой ряд называется сходящимся и его сумма равна значению этого предела, иначе ряд называется расходящимся.

Пример 7.1. $a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ — сумма бесконечной геометрической прогрессии.

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}(1-q^n),$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q}(1-q^n) = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty}(1-q^n).$$

При $q < 1$ ряд сходится и его сумма равна $a/(1-q)$.

При $q > 1$ ряд расходится.

Пример 7.2. $1+2+3+...+n+... = \sum_{n=1}^{\infty} n$.

Очевидно, что этот ряд расходится.

7.2. Свойства числовых рядов

Теорема 7.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и c — некоторое число, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, причем выполняется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма исходного ряда. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

$$S_n^1 = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n = c \cdot (a_1 + a_2 + ... + a_n) = c \cdot S_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^1 = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S = S^1,$$

$$S^1 = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot S.$$

Теорема 7.2. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

Теорема 7.3. Сходимость ряда не изменится, если у него отбросить конечное число членов.

7.3. Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 7.4 **(необходимый признак сходимости ряда).** Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n ,$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} .$$

Вычтем эти равенства:

$$a_n = S_n - S_{n-1} .$$

Так как ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 .$$

Полученный признак не является достаточным, т.е. из того, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует, что ряд сходится. Этот признак поможет установить расходимость ряда: если признак не выполняется, то ряд расходится.

Пример 7.3. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармонический ряд.

$a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится.

7.4. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Теорема 7.5. **(признак сравнения).** Если члены двух числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяют неравенству $a_n \le b_n$ для любых n, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда. Из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда.

Пример 7.4. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Сравним его с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$n > \sqrt{n}, \qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

По признаку сравнения данный ряд расходится.

Теорема 7.6. **(признак Даламбера).** Если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \text{, то:}$$

а) при $\ell < 1$ ряд сходится;
б) при $\ell > 1$ ряд расходится;
в) при $\ell = 1$ вопрос о сходимости открыт.

Пример 7.5. $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{n \cdot a_n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = a \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = a,$$

при $a < 1$ ряд сходится, $a > 1$ ряд расходится.

Пример 7.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left[1^\infty\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Ряд расходится.

7.5. Знакопеременные ряды

Числовой ряд, члены которого имеют различные знаки, называется знакопеременным рядом.

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \tag{7.1}$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \tag{7.2}$$

Определение 7.4. Ряд (7.1) называется условно сходящимся, если сам ряд (7.1) сходится, а ряд (7.2), составленный из абсолютных величин, расходится.

Определение 7.5. Ряд (7.1) называется абсолютно сходящимся, если сам ряд (7.1) сходится и ряд из абсолютных величин тоже сходится.

Пример 7.7. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ — ряд сходится,

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — ряд расходится.

Таким образом, ряд является условно сходящимся.

Пример 7.8. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$ — ряд сходится,

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ — ряд сходится.

Ряд является абсолютно сходящимся.

Теорема 7.7. Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда, сходится, то и сам ряд сходится (из абсолютной сходимости следует условная).

7.6. Знакочередующиеся ряды

Знакопеременный ряд, у которого соседние члены имеют противоположные знаки, называется знакочередующимся. Общий вид знакочередующегося ряда:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, a_n \geq 0.$$

Теорема 7.8. **(достаточный признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда).** Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, a_n \geq 0$ монотонно убывают, т.е. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \ldots$ и предел n-го члена с ростом n стремится к нулю $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0)$, то ряд сходится.

Пример 7.9. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, следовательно, ряд сходится.

Пример 7.10. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$,

$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0$, следовательно, ряд сходится.

7.7. Степенные ряды

Определение 7.6. Ряд вида $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется функциональным рядом. При $x = x_0$ данный ряд превращается в числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, который можно исследовать на сходимость.

Определение 7.7. Множество действительных чисел A называется областью сходимости функционального ряда, если для любых $x \in A$ соответствующий числовой ряд сходится.

Функциональный ряд является функцией, определенной на области сходимости.

Определение 7.8. Функциональный ряд, расположенный по положительным возрастающим степеням переменной x, называется степенным рядом.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

где $a_0, a_1 \ldots$ — некоторые числа.

Теорема 7.9. Для любого степенного ряда существует число $0 < R \le \infty$ такое, что при $x \in (-R, R)$ ряд сходится, при $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$ ряд расходится, при $x = \pm R$ вопрос открыт.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, $(-R;R)$ — интервал сходимости степенного ряда.

Пример 7.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} = 1.$$

Интервал сходимости $(-1,1)$.

При $x = 1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Он расходится.

При $x=-1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Он сходится.

Итак, при $x \in [-1;1)$ ряд сходится (область сходимости), при $x \in (-\infty:-1)\bigcup[1:+\infty)$ ряд расходится.

7.8. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Пусть дан степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, который имеет интервал сходимости (–R:R). На этом интервале степенной ряд можно рассматривать как функцию

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

с областью определения (–R;R).

Теорема 7.10. Степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

Теорема 7.11. Степенной ряд можно почленно интегрировать на интервале сходимости:

$$\int f(x)dx=c+a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+...+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+...=c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}.$$

7.9. Ряды Маклорена

Пусть функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема бесконечное число раз в некоторой окрестности точки 0.

Предположим, что эта функция может быть представлена в виде степенного ряда (разложена в ряд).

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n+....$$

Найдем коэффициенты этого разложения. Для этого продифференцируем функцию некоторое число раз.

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+...+na_nx^{n-1}+...,$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3+3\cdot 4a_4x^2+4\cdot 5a_5x^3+...+(n-1)na_nx^{n-2}+...,$$

$$f'''(x)=2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x\ +3\cdot 4\cdot 5a_5x^2+...+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}+...,$$

$$f^{IV}(x)=2\cdot 3\cdot 4a_4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5x\ +...+(n-3)(n-2)(n-1)na_nx^{n-4}+...,$$

...

$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-2)(n-1)na_n+... \text{ и т.д.}$$

Положим в этих равенствах $x=0$.

$f(0)=a_0$,	$a_0=f(0)$,
$f'(0)=1\cdot a_1$,	$a_1=\dfrac{f'(0)}{1!}$,
$f''(0)=1\cdot 2\cdot a_2$,	$a_2=\dfrac{f''(0)}{2!}$,
$f'''(0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3$,	$a_3=\dfrac{f'''(0)}{3!}$,
$f^{IV}(0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4$,	$a_4=\dfrac{f^{IV}(0)}{4!}$,
...	...
$f^{(n)}(0)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n\cdot a_n$,	$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, и т. д.

Подставляя полученные коэффициенты в ряд, будем иметь

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...$$

$$...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Данный ряд называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

Замечание. $0!=1$.

7.10. Разложение в ряд Маклорена некоторых функций

Пример 7.12. $f(x)=e^x$.

$f'(x)=e^x$,

…

$f^{(n)}(x)=e^x$,

…

$\forall k \ f^{(k)}(0)=1$.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+....+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Пример 7.13. $f(x)=\sin x$, $f(0)=0$,

$f'(x)=\cos x$, $\quad f'(0)=1$,

$f''(x)=-\sin x$, $\quad f''(0)=0$,

$f'''(x)=-\cos x$, $\quad f'''(0)=-1$,

$f^{\mathrm{IV}}(x)=\sin x$, $\quad f^{\mathrm{IV}}(0)=0$, и т.д.

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^n .$$

Пример 7.14. $f(x)=\cos x$, $f(0)=1$,

$f'(x)=-\sin x$, $\quad f'(0)=0$,

$f''(x)=-\cos x$, $\quad f''(0)=-1$,

$f'''(x)=\sin x$, $\quad f'''(0)=0$,

$f^{\mathrm{IV}}(x)=\cos x$, $\quad f^{\mathrm{IV}}(0)=1$ и т.д.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n .$$

Пример 7.15. Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^m$, где $m \in \mathrm{R}$.

$f(x) = (1+x)^m,$ $\qquad f(0) = 1,$

$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$ $\qquad f'(0) = m,$

$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$ $\qquad f''(0) = m(m-1),$

$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},$ $\qquad f'''(0) = m(m-1)(m-2),$

... $\qquad$ ...

$f^{(n)}(x) = m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n},$ $\qquad f^{(n)}(0) = m(m-1)...(m-n+1),$

... $\qquad$ ...

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...$$
$$+ \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...$$

Интервал сходимости данного ряда $(-1,1)$. Этот ряд называется биномиальным.

Глава 8

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

8.1. Линейное векторное пространство

Определение 8.1. Упорядоченная совокупность из n действительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется n-мерным вектором $\bar{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются координатами вектора.

Два n-мерных вектора $\overline{a}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ считаются равными, если равны их соответствующие координаты:

$$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a_i = b_i\,,\ (i = \overline{1,n}).$$

Вектор, все координаты которого равны нулю, называется ноль-вектором и обозначается $\overline{0}(0,0,\ldots,0)$.

Пример 8.1. $\overline{a}\,(3;\ 1/2;\ 0{,}7;\ -2;\ 0)$ — пятимерный вектор.

Определение 8.2. Суммой (разностью) двух n-мерных векторов $\overline{a}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется n-мерный вектор, координаты которого равны суммам (разностям) соответствующих координат исходных векторов:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ \ldots;\ a_n \pm b_n).$$

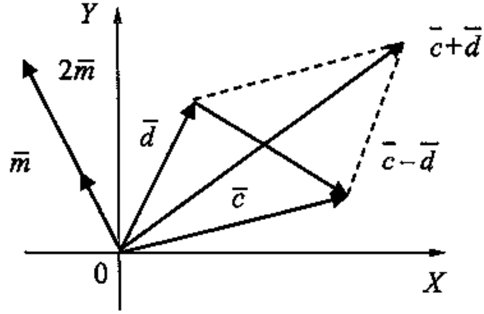
Определение 8.3. Произведением n-мерного вектора $\overline{a}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на число k называется n-мерный вектор, координаты которого равны произведениям координат вектора $\overline{a}$ на число k:

$$k \cdot \overline{a} = (ka_1;\ ka_2;\ \ldots;\ ka_n).$$

Для геометрических векторов ($n < 4$) эти операции эквивалентны правилу параллелограмма или треугольника и растяжению (сжатию) вектора.

Пример 8.2. Пусть даны три вектора: $\overline{c}(4;1)$, $\overline{d}(1;3)$ и $\overline{m}\,(-1{,}2)$.

$$\overline{c} + \overline{d} = (5;\ 4), \qquad \overline{c} - \overline{d} = (3;\ -2), \qquad 2\,\overline{m} = (-2{,}4).$$



Свойства операций над векторами:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ — коммутативность,
2) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ — ассоциативность,
3) $k\cdot(\overline{a} \pm \overline{b}) = k\cdot\overline{a} \pm k\cdot\overline{b}$ — дистрибутивность,
4) $(k_1 \pm k_2)\cdot\overline{a} = k_1\cdot\overline{a} \pm k_2\cdot\overline{a}$,
5) $(k_1\cdot k_2)\cdot\overline{a} = k_1\cdot(k_2\cdot\overline{a})$,
6) $1\cdot\overline{a} = \overline{a}$,
7) $0\cdot\overline{a} = \overline{0}$,
8) $k\cdot\overline{0} = \overline{0}$,
9) $k\cdot\overline{a}=\overline{0} \Leftrightarrow k=0 \vee \overline{a}=\overline{0}$.

Определение 8.4. Совокупность всех n-мерных векторов с введенными на ней операциями сложения и умножения на число называется n-мерным линейным векторным пространством и обозначается E^n.

Пример 8.3. E^2 — совокупность всех двухмерных векторов плоскости с обычными операциями сложения и умножения векторов.

8.2. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами

Определение 8.5. Скалярным произведением двух n-мерных векторов $\overline{a}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\overline{b}\,(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, равное сумме попарных произведений соответствующих координат.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n.$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ — коммутативность;
2. $\overline{a}\cdot(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}$ — дистрибутивность;
3. $k\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b}) = (k\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}$,
4. $\overline{a}\cdot\overline{a} = \overline{a}^2 \geq 0$, $\overline{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0}$.

Определение 8.6. Длиной n-мерного вектора называется величина:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2} = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}}\,.$$

Определение 8.7. Углом между двумя ненулевыми n-мерными векторами называется угол, косинус которого вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}\,.$$

8.3. Коллинеарные и ортогональные векторы

Определение 8.8. Два n-мерных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если найдется число λ такое, что $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$.

Рассмотрим два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Так как они коллинеарны, то $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$, или $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \ldots, \lambda b_n)$. Следовательно, $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, …, $a_n = \lambda b_n$.

Выражая из этих равенств λ, получим

$$\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} \text{ — условие коллинеарности.}$$

Для того чтобы два вектора были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.

Найдем угол между коллинеарными векторами.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{\lambda\cdot\overline{b}\cdot\overline{b}}{|\lambda\cdot\overline{b}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{\lambda b_1^2 + \lambda b_2^2 + \ldots + \lambda b_n^2}{\sqrt{\lambda^2 b_1^2 + \lambda^2 b_2^2 + \ldots + \lambda^2 b_n^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}} = \frac{\lambda}{|\lambda|} =$$

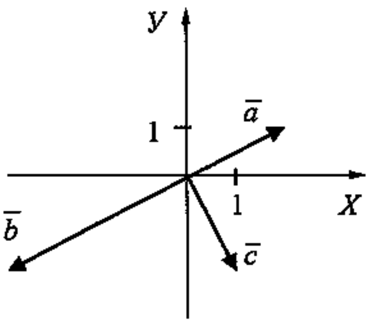
$$= \begin{cases} 1, \text{при}\, \lambda > 0; \cos\varphi = 1 \text{ — векторы сонаправлены,} \\ -1, \text{при}\, \lambda < 0; \cos\varphi = -1 \text{ — векторы противоположно направлены.} \end{cases}$$

Определение 8.9. Два ненулевых n-мерных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ортогональными, или перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

$$\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}\cdot\overline{b} = 0$$ — условие ортогональности.

Пример 8.4.



$\overline{a}\,(2;1)$, $\overline{b}\,(-4;-2)$, $\overline{c}\,(1;-2)$.

$$\overline{a} = -\frac{1}{2}\ \overline{b},$$

$$\overline{a}\cdot\overline{c} = 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0.$$

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны,

векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ ортогональны.

8.4. Системы векторов

Пусть дана система n-мерных векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$.

Определение 8.10. Линейной комбинацией системы векторов называется выражение вида

$$c_1\cdot\overline{a}_1 + c_2\cdot\overline{a}_2 + ... + c_k\cdot\overline{a}_k,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — некоторые числа.

Определение 8.11. Выпуклой линейной комбинацией системы векторов называют линейную комбинацию, в которой все коэффициенты неотрицательны и сумма всех коэффициентов равна единице.

$$t_1\cdot\overline{a}_1 + t_2\cdot\overline{a}_2 + ... + t_k\cdot\overline{a}_k = \sum_{i=1}^{k} t_i\cdot\overline{a}_i;\ t_i \geq 0,\ i=\overline{1,k};\ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1.$$

Определение 8.12. Вектор $\overline{b}$ разлагается по системе векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$, если его можно представить в виде линейной комбинации векторов этой системы.

$$\overline{b} = \lambda_1\cdot\overline{a}_1 + \lambda_2\cdot\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\cdot\overline{a}_k.$$

Определение 8.13. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ называется линейно зависимой, если один из векторов системы можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов системы, и линейно независимой — в противном случае.

Определение 8.13′. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ называется линейно зависимой, если найдутся числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не все равные нулю, такие, что линейная комбинация векторов с данными коэффициентами равна нулевому вектору: $c_1 \cdot \overline{a}_1 + c_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + c_k \cdot \overline{a}_k = \overline{0}$, в противном случае система называется линейно независимой.

Покажем, что эти определения эквивалентны.

Пусть выполняется определение 8.13, т.е. один из векторов системы равен линейной комбинации остальных:

$$\overline{a}_s = \lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_{s-1} \cdot \overline{a}_{s-1} + \lambda_{s+1} \cdot \overline{a}_{s+1} + \ldots + \lambda_k \cdot \overline{a}_k,$$

$$\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_{s-1} \cdot \overline{a}_{s-1} - \overline{a}_s + \lambda_{s+1} \cdot \overline{a}_{s+1} + \ldots + \lambda_k \cdot \overline{a}_k = \overline{0}.$$

Линейная комбинация системы векторов равна нулевому вектору, причем не все коэффициенты этой комбинации равны нулю, т.е. выполняется определение 8.13′.

Пусть выполняется определение 8.13′. Линейная комбинация системы векторов равна $\overline{0}$, причем не все коэффициенты комбинации равны нулю, например, коэффициенты при векторе $\overline{a}_p$.

$$\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_{p-1} \cdot \overline{a}_{p-1} + \lambda_p \cdot \overline{a}_p + \lambda_{p+1} \cdot \overline{a}_{p+1} + \ldots + \lambda_k \cdot \overline{a}_k = \overline{0},$$

$$\lambda_p \neq 0,$$

$$\overline{a}_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p} \cdot \overline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_p} \cdot \overline{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} \cdot \overline{a}_{p-1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} \cdot \overline{a}_{p+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \cdot \overline{a}_k.$$

Один из векторов системы мы представили в виде линейной комбинации остальных, т.е. выполняется определение 8.13.

Определение 8.14. Единичным вектором, или ортом, $\overline{e}_i$ называется n-мерный вектор, у которого i-я координата равна единице, а остальные — нулевые.

$$\overline{e}_1\,(1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$\overline{e}_2\,(0, 1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots$$
$$\overline{e}_n\,(0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Теорема 8.1. Различные единичные векторы n-мерного пространства линейно независимы.

Доказательство. Пусть линейная комбинация этих векторов с произвольными коэффициентами равна нулевому вектору.

$$c_1 \cdot \overline{e}_1 + c_2 \cdot \overline{e}_2 + \ldots + c_\text{n} \cdot \overline{e}_\text{n} = (c_1, c_2, \ \ldots, c_n) = \overline{0}\,.$$

Из этого равенства следует, что все коэффициенты равны нулю. Получили противоречие.

Каждый вектор n-мерного пространства $\overline{a}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ может быть представлен в виде линейной комбинации единичных векторов с коэффициентами, равными координатам вектора

$$\overline{a} = \overline{e}_1 \cdot a_1 + \overline{e}_2 \cdot a_2 + \ldots + \overline{e}_n \cdot a_n\,.$$

Теорема 8.2. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

Доказательство. Пусть дана система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ и один из векторов является нулевым, например $\overline{a}_k = \overline{0}$. Тогда с векторами данной системы можно составить линейную комбинацию, равную нулевому вектору, причем не все коэффициенты будут нулевыми:

$$0 \cdot \overline{a}_1 + 0 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + 1 \cdot \overline{a}_k = \overline{0}\,.$$

Следовательно, система линейно зависима.

Теорема 8.3. Если некоторая подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Доказательство. Дана система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r, \overline{a}_{r+1}, \ldots, \overline{a}_k$. Предположим, что система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_r$ линейно зависима, т.е. найдутся числа c_1, c_2, …, c_r, не все равные нулю, такие, что $c_1 \cdot \overline{a}_1 + c_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + c_r \cdot \overline{a}_r = \overline{0}$. Тогда

$$c_1 \cdot \overline{a}_1 + c_2 \cdot \overline{a}_2 + \ldots + c_r \cdot \overline{a}_r + 0 \cdot \overline{a}_{r+1} + \ldots + 0 \cdot \overline{a}_k = \overline{0}\,.$$

Получилось, что линейная комбинация векторов всей системы равна $\overline{0}$, причем не все коэффициенты этой комбинации равны нулю. Следовательно, система векторов линейно зависима.

Следствие. Если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема также линейно независима.

Доказательство.

Предположим противное, т.е. некоторая подсистема линейно зависима. Из теоремы следует, что вся система линейно зависима. Мы пришли к противоречию.

Теорема 8.4 **(теорема Штейница).** Если каждый из векторов $\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_m$ является линейной комбинацией векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ и $m > n$, то система векторов $\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_m$ линейно зависима.

Следствие. В любой системе n-мерных векторов не может быть больше чем n линейно независимых.

Доказательство. Каждый n-мерный вектор выражается в виде линейной комбинации n единичных векторов. Поэтому, если система содержит m векторов и $m > n$, то, по теореме, данная система линейно зависима.

8.6. Ранг и базис системы векторов

Определение 8.15. Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

$$rang(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_p) = r$$

Определение 8.16. Базисом системы векторов называется максимальная линейно независимая подсистема данной системы векторов.

Теорема 8.5. Любой вектор системы можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса системы. (Всякий вектор системы можно разложить по векторам базиса.) Коэффициенты разложения определяются для данного вектора и данного базиса однозначно.

Доказательство. Пусть система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k, \overline{a}_{k+1}, ..., \overline{a}_p$ имеет базис $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$.

1 случай. Вектор $\overline{a}$ — из базиса. Следовательно, он равен одному из векторов базиса, допустим $\overline{a}_1$. Тогда $\overline{a}_1 = 1 \cdot \overline{a}_1 + 0 \cdot \overline{a}_2 + ... + 0 \cdot \overline{a}_k$.

2 случай. Вектор $\overline{a}_r$ — не из базиса. Тогда $r > k$.

Рассмотрим систему векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k, \overline{a}_r$. Данная система является линейно зависимой, так как $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ — базис, т.е. максимальная линейно независимая подсистема. Следовательно, найдутся числа $c_1, c_2, ..., c_k, c$, не все равные нулю, такие, что

$$c_1 \cdot \overline{a}_1 + c_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + c_k \cdot \overline{a}_k + c \cdot \overline{a}_r = \overline{0}.$$

Очевидно, что $c \neq 0$ (если $c = 0$, то базис системы является линейно зависимым).

$$\overline{a}_r = -\frac{c_1}{c} \cdot \overline{a}_1 - \frac{c_2}{c} \cdot \overline{a}_2 - ... - \frac{c_k}{c} \cdot \overline{a}_k.$$

Докажем, что разложение вектора по базису единственно. Предположим противное: имеется два разложения вектора по базису.

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + \alpha_k \cdot \overline{a}_k,$$

$$\overline{a} = \beta_1 \cdot \overline{a}_1 + \beta_2 \cdot \overline{a}_2 + ... + \beta_k \cdot \overline{a}_k.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \overline{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \overline{a}_2 + ... + (\alpha_k - \beta_k) \cdot \overline{a}_k.$$

Учитывая линейную независимость векторов базиса, получим

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \ ..., \ \alpha_k = \beta_k.$$

Следовательно, разложение вектора по базису единственно.

Количество векторов в любом базисе системы одинаково и равно рангу системы векторов.

Пример 8.5. Дана система векторов: $\overline{a}\,(2, 0)$, $\overline{b}\,(5, 5)$, $\overline{c}\,(4, 3)$.

$$r = 2, \ \overline{c} = \frac{1}{2} \cdot \overline{a} + \frac{3}{5} \cdot \overline{b}.$$

$\overline{a}, \overline{b}$; $\overline{a}, \overline{c}$; $\overline{b}, \overline{c}$ — базисы системы.

8.7. Ранг и базис *n*-мерного линейного векторного пространства

Теорема 8.6. Ранг n-мерного пространства равен его размерности: $r = n$.

Доказательство. На основании теоремы Штейница ранг не превышает n. С другой стороны, в пространстве имеется система из n линейно независимых единичных векторов, следовательно, ранг не меньше n. Значит, базис содержит n векторов.

Следствие 1. Любой базис n-мерного пространства состоит из n линейно независимых n-мерных векторов.

Следствие 2. Любая система в n-мерном пространстве, содержащая больше чем n векторов, линейно зависима.

Следствие 3. Любой вектор пространства можно однозначно разложить по векторам любого базиса. Коэффициенты разложения для данного вектора и данного базиса определяются единственным образом. Коэффициенты разложения называются координатами данного вектора в этом базисе.

Пример 8.6. $\bar{e}_1$ $(1, 0, 0, \ldots, 0)$,

$\bar{e}_2$ $(0, 1, 0 \ldots 0)$,

…

$\bar{e}_n$ $(0, 0, 0, \ldots, 1)$.

Данная система образует базис в n-мерном пространстве, который называется единичным.

Возьмем любой n-мерный вектор $\bar{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

$$\bar{a} = \bar{e}_1 \cdot a_1 + \bar{e}_2 \cdot a_2 + \ldots + \bar{e}_n \cdot a_n .$$

8.8. Ортогональные системы векторов

Определение 8.17. Система ненулевых векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ называется ортогональной, если все векторы этой системы попарно ортогональны.

Теорема 8.7. Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

8.9. Матрицы

Определение 8.18. Прямоугольная таблица чисел вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

называется прямоугольной матрицей размера $m \times n$, где m — количество строк, а n — количество столбцов.

Определение 8.19. Числа, которые образуют матрицу, — a_{ij}, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, называются элементами матрицы.

Определение 8.20. Числа i и j называются индексами элемента a_{ij}, i показывает, в какой строке расположен данный элемент, а j — в каком столбце находится этот элемент.

Две матрицы считаются равными, если равны их соответствующие элементы.

8.10. Виды матриц

Если $m = n$, то матрица называется квадратной матрицей порядка n.

Матрица размера $m \times 1$ называется матрицей-столбцом.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}.$$

Матрица размера $1 \times n$ называется матрицей-строкой.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..., & a_{1n} \end{pmatrix}_{1\times n}.$$

Определение 8.21. Элементы матрицы, имеющие равные индексы, образуют главную диагональ матрицы.

Определение 8.22. Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы вне ее главной диагонали равны нулю.

Определение 8.23. Диагональная матрица n-го порядка, у которой диагональные элементы равны единице, называется единичной матрицей n-го порядка и обозначается E.

Определение 8.24. Матрица называется матрицей треугольного вида, если все элементы над (под) главной диагональю равны нулю.

Примеры. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$.

8.11. Операции над матрицами

Определение 8.25. Транспонированием матрицы называется такое преобразование матрицы, при котором строки и столбцы меняются ролями при сохранении номеров. Транспонированная матрица обозначается A^{T}.

$$A^T_{m\times n} = C_{n\times m}\ ,\ c_{ij} = a_{ji}\ ,\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}\ .$$

Для квадратной матрицы это преобразование эквивалентно симметричному отображению относительно главной диагонали.

Определение 8.26. Суммой (разностью) двух матриц одинакового порядка называется матрица того же порядка, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов исходных матриц.

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n}\ ,\ c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}\ ,\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}\ .$$

Определение 8.27. Произведением матрицы на число называется матрица того же размера, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента исходной матрицы на это число.

$$k\cdot A_{m\times n} = C_{m\times n}\ ,\ c_{ij} = ka_{ij}\ ,\ i=\overline{1,m}\ ,\ j=\overline{1,n}\ .$$

Пример 8.7. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$,

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 8 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}, \qquad B-A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -10 & -10 & -10 \end{pmatrix}_{2\times 3},$$

$$\frac{1}{3}\cdot A = A\cdot\frac{1}{3}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{10}{3} & 3 & \dfrac{8}{3} \end{pmatrix}_{2\times 3}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Определение 8.28. Произведением двух матриц A и B, размеры которых заданы соотношением: количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй, называется матрица C, у которой количество строк равно количеству строк первой матрицы, а количество столбцов равно количеству столбцов второй. Каждый элемент данной матрицы равен сумме попарных произведений элементов соответствующей строки первой матрицы и элементов соответствующего столбца второй.

$A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}=C_{m\times n}$, $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{ip}\cdot b_{pj}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Пример 8.8. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\0&-1&-2\end{pmatrix}_{3\times3}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}$,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\0&-1&-2\end{pmatrix}_{3\times3}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6\\4\cdot1+5\cdot3+6\cdot5 & 4\cdot2+5\cdot4+6\cdot6\\0\cdot1+(-1)\cdot3+(-2)\cdot5 & 0\cdot2+(-1)\cdot4+(-2)\cdot6\end{pmatrix}_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}22&28\\49&64\\-13&-16\end{pmatrix}_{3\times2}.$$

Умножить B на A нельзя, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Пример 8.9. $C=\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&1\end{pmatrix}_{2\times3}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}$,

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}\cdot\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&1\end{pmatrix}_{2\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot0+2\cdot4 & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3+2\cdot1\\3\cdot0+4\cdot4 & 3\cdot2+4\cdot1 & 3\cdot3+4\cdot1\\5\cdot0+6\cdot4 & 5\cdot2+6\cdot1 & 5\cdot3+6\cdot1\end{pmatrix}_{3\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix}8&4&5\\16&10&13\\24&16&21\end{pmatrix}_{3\times3}.$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}0&2&3\\4&1&1\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot1+2\cdot3+3\cdot5 & 0\cdot2+2\cdot4+3\cdot6\\4\cdot1+1\cdot3+1\cdot5 & 4\cdot2+1\cdot4+1\cdot6\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}21&26\\12&18\end{pmatrix}_{2\times2}.$$

$B\cdot C\neq C\cdot B$. Произведение матриц не коммутативно!

Пример 8.10. $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}$, $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

$$E\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times3}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot3+0\cdot5 & 1\cdot2+0\cdot4+0\cdot6\\0\cdot1+1\cdot3+0\cdot5 & 0\cdot2+1\cdot4+0\cdot6\\0\cdot1+0\cdot3+1\cdot5 & 0\cdot2+0\cdot4+1\cdot6\end{pmatrix}_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}_{3\times2}=B.$$

$\underline{A\cdot E=E\cdot A=A.}$

Приведем основные свойства операций над матрицами.

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$ — произведение матриц не коммутативно.
2. $A+B=B+A$ — сложение матриц коммутативно.
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$ — ассоциативность сложения.
4. $(A\,B)\,C=A\,(B\,C)$ — ассоциативность умножения.
5. $\alpha\cdot(A\pm B)=\alpha\cdot A\pm\alpha\cdot B$,
6. $(\alpha_1\cdot\alpha_2)\cdot A=\alpha_1\cdot(\alpha_2\cdot A)$,
7. $(\alpha_1+\alpha_2)\cdot A=\alpha_1\cdot A+\alpha_2\cdot A$,
8. $A\cdot(B\pm C)=A\cdot B\pm A\cdot C$ — правая дистрибутивность.

9. $(B \pm C) \cdot A = B \cdot A \pm C \cdot A$ — левая дистрибутивность.

10. $A \cdot E = E \cdot A = A$.

11. $(\alpha \cdot A)^{\mathrm{T}} = \alpha \cdot A^{\mathrm{T}}$.

12. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

13. $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

8.12. Определители

Пусть дана квадратная матрица порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Определение 8.29. Определителем n-го порядка матрицы A называется число, равное алгебраической сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых равно произведению n элементов матрицы A $a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n}$, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем каждое слагаемое берется со знаком «+» или «–».

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 8.11.

Определитель второго порядка. $n = 2$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$ слагаемых.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Мнемоническое правило вычисления определителя второго порядка:

слагаемое со знаком «–», слагаемое со знаком «+».

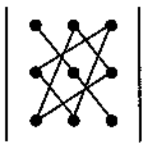
Пример 8.12.

Определитель третьего порядка. $n = 3$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ слагаемых,

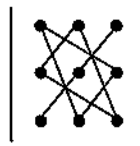
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Мнемоническое правило вычисления определителя третьего порядка:



слагаемые со знаком «+»,



слагаемые со знаком «–».

Можно построить мнемонические правила для вычисления определителей порядка выше, чем три, но они будут слишком громоздкими. Поэтому вычисление таких определителей основано на свойствах определителей.

8.13. Свойства определителей

Теорема 8.8. При транспонировании величина определителя не меняется.

Следствие. Строки и столбцы в определителе равноправны, т.е. свойства, справедливые для строк, будут справедливы и для столбцов.

Теорема 8.9. Если все элементы одной строки определителя умножить на одно и то же число, то и весь определитель умножится на это число.

Следствие. Постоянный множитель строки можно выносить за знак определителя.

Теорема 8.10. Если в определителе поменять местами две строки, то определитель сменит знак на противоположный.

Следствие 1. Определитель, у которого две строки равны, равен нулю.

Следствие 2. Если в определителе две строки пропорциональны, то такой определитель равен нулю.

Теорема 8.11. Если строка определителя представлена в виде алгебраической суммы нескольких слагаемых, то определитель равен алгебраической сумме определителей, у которых в первом определителе в данной строке стоит первое слагаемое, во втором — второе слагаемое и т.д.

Следствие. Еели строки определителя линейно зависимы, то такой определитель равен нулю.

Теорема 8.12. Если к элементам одной строки определителя прибавить соответствующие элементы другой, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

8.14. Миноры и алгебраические дополнения

Пусть дана прямоугольная матрица A размера $m \times n$.

Определение 8.30. Минором порядка k данной матрицы, где $k \le \min(m;n)$, называется определитель k-го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием $(m - k)$ строк и $(n - k)$ столбцов.

Пример 8.13.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 4}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix},$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Определение 8.31. Дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется определитель $(n - 1)$ порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием этого элемента вместе со строкой и столбцом, в которых он расположен.

Пример 8.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

Найдем дополнительный минор к элементу a_{31}. $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Определение 8.32. Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример 8.15. Найдем алгебраическое дополнение к элементу a_{33}.

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=1\cdot(5-8)=-3.$$

Теорема 8.13. Определитель равен сумме попарных произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$|A|=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+...+a_{in}\cdot A_{in}$ — разложение определителя по i-й строке.

Теорема 8.14. Сумма попарных произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки (столбца) равна нулю.

Вычисление определителей порядка $n > 3$ сводится к вычислению определителей второго и третьего порядка с помощью теорем 8.12 и 8.13.

Пример 8.16.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 0 & -1 & -2\\ -3 & -4 & -5 & -6\end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}+a_{41}\cdot A_{41}=$$

разложение определителя
по первому столбцу

$$=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot M_{11}+a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21}+$$
$$+a_{31}\cdot(-1)^{3+1}\cdot M_{31}+a_{41}\cdot(-1)^{4+1}\cdot M_{41}=$$
$$=1\cdot1\cdot\begin{vmatrix}6 & 7 & 8\\ 0 & -1 & -2\\ -4 & -5 & -6\end{vmatrix}+5\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ -4 & -5 & -6\end{vmatrix}+9\cdot1\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ -4 & -5 & -6\end{vmatrix}+$$
$$+(-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ 0 & -1 & -2\end{vmatrix}.$$

Перед разложением определителя для удобства получают в одном из столбцов нули. Это сокращает объемы вычислений.

Для этого используют теорему 8.12. Одну из строк умножают на некоторые числа и складывают с другими строками.

$$|A| = \begin{array}{r} (2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42} = a_{12} \cdot A_{12} = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} =$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot \begin{array}{r} \\ \\ (2) \end{array}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 9 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

8.15. Обратная матрица

Определение 8.33. Квадратная матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю, и невырожденной — в противном случае.

Определение 8.34. Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A n-го порядка, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема 8.15. Для любой невырожденной квадратной матрицы существует единственная обратная матрица.

Доказательство. 1 часть (единственность).

Предположим, что обратная матрица существует. Докажем, что она единственная. Предположим противное, т.е. существует две обратные матрицы: A^{-1} и $\widetilde{A}$.

Тогда $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ и $A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A = E$.

Рассмотрим равенство

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Умножим его слева на $\widetilde{A}$.

$$\widetilde{A} \cdot A \cdot A^{-1} = \widetilde{A} \cdot E,$$

$$E \cdot A^{-1} = \widetilde{A},$$

$$A^{-1} = \widetilde{A}.$$

Получили противоречие.

2 часть (существование). Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}, \ |A|\neq 0.$$

Построим обратную матрицу. Для этого совершим ряд действий:

1) заменим все элементы матрицы их алгебраическими дополнениями:

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ & & \dots & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$ — матрица, присоединенная к матрице A;

2) транспонируем полученную матрицу:

$$(A^*)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n};$$

3) разделим все элементы на число $|A|$

$$A^{-1}=\frac{(A^*)^T}{|A|}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ & & \dots & \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Проверим, будет ли полученная матрица обратной к исходной. Для этого умножим матрицу A на A^{-1}. Элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы произведения, будет равен

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot \frac{A_{j1}}{|A|} + a_{i2} \cdot \frac{A_{j2}}{|A|} + \ldots + a_{in} \cdot \frac{A_{jn}}{|A|} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot (a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn}) = \begin{cases} = \frac{1}{|A|} \cdot |A| = 1, \text{ при } \ i = j, \\ = \frac{1}{|A|} \cdot 0 = 0, \ \ \text{при } \ i \neq j. \end{cases}$$

Элементы матрицы-результата совпадают с элементами единичной матрицы E. Следовательно, $A \cdot A^{-1} = E$, т.е. A^{-1} — обратная матрица к A.

Таким образом, для произвольной невырожденной матрицы можно построить обратную матрицу и, следовательно, обратная матрица существует. Теорема полностью доказана.

8.16. Элементарные преобразования над матрицей. Нахождение обратной матрицы

Определение 8.35. Элементарными преобразованиями над матрицей называются:

1) умножение любой строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой, умноженных на одно и то же число;
3) перестановка строк;
4) отбрасывание строки из нулей.

Определение 8.36. Две матрицы называются эквивалентными ($A \sim B$), если от одной можно перейти к другой с помощью конечного числа элементарных преобразований.

Теорема 8.16. Любую невырожденную квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к единичной матрице того же порядка. Применяя ту же последовательность элементарных преобразований к единичной матрице, можно получить обратную матрицу к данной.

Обычно элементарные преобразования производят над данной матрицей и единичной одновременно. Для этого составляют расширенную матрицу, в левой части которой стоит исходная матрица, а в правой — единичная матрица того же порядка. С помощью элементарных преобразований в левой части создают единичную матрицу, параллельно в правой части автоматически создается обратная матрица.

$$(A|E)\Rightarrow(E|A^{-1}).$$

Пример 8.17. Пусть дана матрица $A=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}_{2\times2}$.

Составим расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}4&3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\\(-3)\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}4&3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}-2&0&1&-3\\2&1&0&1\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}(-2)\\ \\\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\2&1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&1&-2\end{array}\right).$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\1&-2\end{pmatrix}_{2\times2},\ A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_{2\times2}=E.$$

8.17. Ранг матрицы

Пусть дана произвольная матрица размером $m\times n$. Возьмем произвольные k строк и k столбцов, $k\le m,\ k\le n$. Минором порядка k называют определитель порядка k, составленный из элементов, расположенных на пересечении выбранных k строк и k столбцов, и обозначают M_k.

Для данной матрицы можно составить $m\cdot n$ миноров первого порядка, $C_m^2C_n^2$ миноров второго порядка и т.д., $C_m^kC_n^k$ миноров k-го порядка.

Определение 8.37. Рангом матрицы называется максимальный порядок минора, отличного от нуля, и обозначается $r(A)$.

Очевидно, что $r(A)\le\min(m,n)$.

Определение 8.38. Отличный от нуля минор порядка $r=r(A)$ называется базисным минором матрицы A, а строки (столбцы), в которых он расположен, называют базисными строками (столбцами).

<u>Теорема 8.17.</u> **(теорема о базисном миноре).** Любой столбец (строка) матрицы A является линейной комбинацией ее базисных столбцов (строк).

Теорема 8.18. Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется. Ранг треугольной матрицы равен числу ненулевых строк этой матрицы.

Для того чтобы найти ранг матрицы, необходимо с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду и найти ранг полученной матрицы. Рассмотрим схему таких преобразований подробно. Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Предположим, что a_{11} отличен от нуля (если $a_{11} = 0$, то, переставив строки, этого можно добиться). Разделим первую строку на a_{11}, после чего на первом месте в первой строке будет стоять 1. Умножая последовательно первую строку на $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}$ и вычитая, соответственно, из второй, третьей, …, n-й, образуем в первом столбце все нулевые элементы.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ & & \dots & \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Преобразуем второй столбец, начиная с элемента a'_{22}. Если этот элемент отличен от нуля, то аналогично вышеизложенному получим на его месте единицу, а ниже расположенные элементы превратим в нули. Если $a'_{22} = 0$, но ниже его в том же столбце есть элемент, отличный от нуля, то, поменяв местами строки, переставим его на место a'_{22}. Если в столбце не окажется ненулевых элементов, то можно поменять местами столбцы, пока на месте a'_{22} не окажется ненулевой элемент.

После второго цикла получим новую эквивалентную матрицу.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a''_{12} & a''_{13} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Выполняя последовательно несколько циклов подобных эквивалентных преобразований и отбросив нулевые строки, придем окончательно к матрице

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a & \dots & a & a & a & a & \dots & a \\ 0 & 1 & a & \dots & a & a & a & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a & a & a & a & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a & a & \dots & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & a & \dots & a \end{pmatrix}_{m1 \times n1}.$$

Буквой «a» условно обозначены элементы матрицы, которые могут принимать любые числовые значения.

Очевидно, что $r(A) = m1$, так как минор, расположенный в первых $m1$ строках и первых $m1$ столбцах, равен единице.

Вычисление ранга системы векторов можно свести к вычислению ранга матрицы. Из теоремы 2 следует, что ранг системы векторов равен рангу матрицы, столбцами (строками) которой являются векторы этой системы.

Пример 8.18. Найти ранг системы векторов

$$\bar{a}_1(1, 3, 3, 6),$$
$$\bar{a}_2(2, 7, -3, 3),$$
$$\bar{a}_3(3, 11, -3, 6),$$
$$\bar{a}_4(4, 15, -6, 6).$$

Составим матрицу из координат векторов и найдем ее ранг.

$$A = \begin{matrix}(-6)(-3)(-3)\end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 3 & -3 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{4\times 4} \sim (9)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -12 & -18 \\ 0 & -9 & -12 & -18 \end{pmatrix}_{4\times 4} \sim$$

$$\sim (-1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}_{4\times 4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}_{3\times 4},$$

$$r(A) = 3,\ M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ранг данной системы векторов равен трем, т.е. она имеет три линейно независимых вектора.

8.18. Собственные векторы и значения матриц

Определение 8.39. Число λ называется собственным значением квадратной матрицы A, если найдется вектор $\overline{x}$ такой, что $A\cdot\overline{x} = \lambda\cdot\overline{x}$. Вектор $\overline{x}$ называется собственным вектором матрицы A, соответствующим данному собственному значению.

<u>Теорема 8.19</u>. Собственные значения матрицы А являются решениями уравнения

$$|A - \lambda\cdot E| = 0.$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением матрицы A.

<u>Теорема 8.20</u>. Число различных собственных значений квадратной матрицы не превосходит ее порядка. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Пример 8.19. Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$.

Составим и решим характеристическое уравнение.

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0,$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda)+2=0,$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0,$$

$$\lambda=2,\qquad \lambda=3.$$

1) $\lambda=2$,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\ -x_1+4x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\ 2x_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2=2x_1,\\ -x_1+4x_2=2x_2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0,\\ -x_1+2x_2=0.\end{cases}$$

$x_2=c,\ \ x_1=2c$, где c – любое число.

Вектор $\overline{x}_1\,(2c,c)$ будет являться собственным вектором, соответствующим собственному значению 2.

2) $\lambda=3$,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\ -x_1+4x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_1\\ 3x_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2=3x_1,\\ -x_1+4x_2=3x_2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2x_1+2x_2=0,\\ -x_1+x_2=0.\end{cases}$$

Вектор $\overline{x}_2\,(c,c)$ будет являться собственным вектором, соответствующим собственному значению 3.

Векторы $\overline{x}_1\,(2c,c)$ и $\overline{x}_2\,(c,c)$ линейно независимы. Так как они двухмерные, то они образуют базис пространства E^2.

8.19. Системы линейных уравнений

Определение 8.40. Система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

называется системой m линейных уравнений с n неизвестными, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные, a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ — коэффициенты при неизвестных, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободные члены.

Определение 8.41. Если все свободные члены равны нулю, то система называется однородной, и неоднородной — в противном случае.

Определение 8.42. Решением системы называется совокупность из n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, при подстановке которой в систему вместо неизвестных будет получено m числовых тождеств.

Определение 8.43. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной в противном случае.

Определение 8.44. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной — в противном случае.

При изучении систем исследуют три вопроса:

1) совместна система или нет;

2) если система совместна, то является ли она определенной или неопределенной;

3) нахождение единственного решения в случае определенной системы и всех решений в случае неопределенной.

8.20. Матричная форма записи системы

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}, \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

С помощью этих матриц систему можно записать в виде $A\overline{x} = B$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}.$$

8.21. Условие совместности

Рассмотрим неоднородную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \text{и} \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица $\overline{A}$ называется расширенной матрицей системы.

<u>Теорема 8.21.(теорема Кронекера-Капелли)</u>. Неоднородная система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство. Необходимость. Пусть система совместна, тогда найдутся числа c_1, c_2, …, c_n, при подстановке которых в систему мы получим m тождеств, которые можно записать в виде одного векторного тождества:

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\dots+c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор-столбец свободных членов является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A, тогда добавление его к системе векторов-столбцов матрицы A не меняет ранга системы. Отсюда $r(A) = r(\overline{A})$.

Достаточность. Пусть $r(A) = r(\overline{A}) = r$. Следовательно, существует линейно независимая подсистема из r векторов-столбцов матрицы A. Она же будет содержатся и в матрице $\overline{A}$. Так как эта система максимальна, то вектор-столбец свободных членов будет выражаться через эти r векторов-столбцов. Следовательно, вектор-столбец свободных членов можно представить в виде линейной комбинации всех векторов-столбцов матрицы A, т.е. найдутся числа c_1, c_2, …, c_n такие, что вектор-столбец будет представлен в виде

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, совокупность чисел c_1, c_2, …, c_n является решением системы, т.е. она совместна.

8.22. Решение системы с помощью формул Крамера

Рассмотрим неоднородную систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Теорема 8.22.(теорема Крамера). Если определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1,n},$$

где $\Delta = |A|$ — главный определитель,

Δ_j — j-й вспомогательный определитель, который получен из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 8.20. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2,$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1. \end{cases}$$

Для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными справедливы свойства:

если главный определитель равен нулю и хотя бы один их вспомогательных определителей отличен от нуля, то система решений не имеет;

если главный определитель и оба вспомогательные определители равны нулю, то система имеет бесконечно много решений.

8.23. Решение системы с помощью обратной матрицы

Пусть дана неоднородная система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Ее можно представить в матричном виде $A\overline{x} = B$.

Пусть определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. Следовательно, система имеет единственное решение. Если $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим обе части равенства $A\overline{x} = B$ слева на A^{-1}.

$$A^{-1}\cdot A\cdot\overline{x}=A^{-1}\cdot B,$$

$$E\cdot\overline{x}=A^{-1}\cdot B,$$

$$\overline{x}=A^{-1}\cdot B.$$

Чтобы найти решение системы, надо найти обратную матрицу к матрице, составленной из коэффициентов при неизвестных, и умножить ее справа на матрицу-столбец свободных членов B.

8.24. Решение произвольных систем линейных неоднородных уравнений

Пусть дана неоднородная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

Предположим, что система совместна, т.е. $r(A)=r(\overline{A})=r\le\min(m,n)$. Следовательно, существует минор порядка r матрицы A, отличный от нуля. Предположим, что он расположен в левом верхнем углу матрицы. Если это не так, то можно переставить уравнения и перенумеровать неизвестные.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ & & \ldots & & \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ & & \ldots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Первые r уравнений системы линейно независимы. Остальные выражаются через них. Следовательно, их можно отбросить.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r+a_{1r+1}x_{r+1}+a_{1r+2}x_{r+2}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r+a_{2r+1}x_{r+1}+a_{2r+2}x_{r+2}+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r+a_{rr+1}x_{r+1}+a_{rr+2}x_{r+2}+\ldots+a_{rn}x_n=b_r. \end{cases}$$

Определение 8.45. Переменные, коэффициенты при которых образуют минор, отличный от нуля (базисный минор), называются базисными переменными (x_1, x_2, …, x_r). Остальные переменные x_{r+1}, …, x_n называются свободными.

Дадим свободным переменным произвольные числовые значения $x_{r+1}=c_{r+1}$, $x_{r+2}=c_{r+2}$, …, $x_n=c_n$.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}c_{r+1}-a_{1r+2}c_{r+2}-\ldots-a_{1n}c_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}c_{r+1}-a_{2r+2}c_{r+2}-\ldots-a_{2n}c_n, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}c_{r+1}-a_{rr+2}c_{r+2}-\ldots-a_{rn}c_n. \end{cases}$$

Мы получили систему из r линейных уравнений с r неизвестными, определитель которой отличен от нуля. Она имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_1=f_1(c_{r+1},\ldots,c_n), \\ x_2=f_2(c_{r+1},\ldots,c_n), \\ \ldots \\ x_r=f_r(c_{r+1},\ldots,c_n) \end{cases} \text{— общее решение.}$$

Определение 8.46. Выражение базисных переменных через свободные называется общим решением системы.

Определение 8.47. Решение системы, полученное из общего при конкретных значениях свободных переменных, называется частным решением. Частных решений у системы бесконечно много, все они содержатся в общем решении.

Определение 8.48. Частное решение, полученное из общего, когда свободные переменные равны нулю, называется базисным решением системы.

Определение 8.49. Базисное решение, координаты которого неотрицательны, называется опорным решением системы.

Пример 8.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0,\ r(A) = r(\overline{A}) = 2.$$

Переменные x_1 и x_2 — базисные, x_3 и x_4 — свободные.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 - x_3 + x_4, \\ x_1 + x_2 = 8 - 2x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Сложим уравнения и результат разделим на 2. Вычтем из второго уравнения первое и результат разделим на 2. Получим

$$\begin{cases} x_1 = 6 - \dfrac{3}{2}x_3 - x_4, \\ x_2 = 2 - \dfrac{1}{2}x_3 - 2x_4 \end{cases} \text{— общее решение.}$$

Из него можно получить частные и базисное решения.

$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = 1 \end{cases}$ — частное решение, полученное при $x_3 = 2$ и $x_4 = 1$.

$\begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0 \end{cases}$ — базисное решение при $x_3 = x_4 = 0$. Оно же является опорным.

8.25. Метод Гаусса

Определение 8.50. Элементарными преобразованиями системы называются:

1) умножение уравнения на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на некоторое число, отличное от нуля.

3) перестановка двух уравнений;

4) отбрасывание уравнения $0 = 0$.

Если получено уравнение $0 = k$, то система несовместна.

Метод Гаусса состоит в приведении системы к диагональному виду путем последовательного исключения неизвестных. Количество исключенных неизвестных равно числу линейно независимых уравнений. Переменная считается исключенной, если она содержится только в одном уравнении с коэффициентом 1.

Пример 8.22.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=4, \\ x_1-x_2+x_3=2, \\ -x_1+x_2+x_3=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3=4, \\ -2x_2+2x_3=-2, \\ 2x_2=4. \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3=4, \\ -2x_2+2x_3=-2, \\ x_2=2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_3=2, \\ 2x_3=2, \\ x_2=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3, \\ x_3=1, \\ x_2=2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3, \\ x_2=2, \\ x_3=1. \end{cases}$$

Получено решение системы $\overline{x}(3,2,1)$.

Метод Гаусса удобно применять к расширенной матрице системы, левую часть которой с помощью элементарных преобразований матрицы нужно привести к единичной матрице.

Пример 8.23. Рассмотрим систему из предыдущего примера. Составим расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Получено решение системы $\overline{x}(3,2,1)$.

8.26. Таблицы Гаусса

Расширенную матрицу системы записывают в таблицу Гаусса, которая имеет на два столбца больше, чем число неизвестных. Расширенные матрицы располагаются в таблице одна под другой.

От одной матрицы к другой переходят с помощью преобразований Жордана:

1) выбирается ключевой элемент преобразования. В качестве ключевого элемента может быть взят любой коэффициент при любой переменной, не равный нулю. Строка и столбец, в которых он располагается, называются ключевыми;

2) элементы ключевой строки делятся на ключевой элемент;

3) ключевой столбец заполняется нулями;

4) остальные элементы пересчитываются по правилу прямоугольника: составляется прямоугольник, в двух вершинах которого находится ключевой элемент (к.э.) и пересчитываемый элемент (п.э.); из произведения элементов, стоящих на диагонали прямоугольника с ключевым элементом, вычитается произведение элементов второй диагонали и полученная разность делится на ключевой элемент.

$$\begin{array}{ll} a - \text{к.э.} & b \\ c & d - \text{п.э.} \end{array}$$

$$d' = \frac{ad - bc}{a}.$$

Если в ключевой строке (столбце) есть ноль, то соответствующий столбец (строка) при преобразовании Жордана сохраняются.

Пример 8.24. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

Выпишем расширенную матрицу системы в таблицу Гаусса.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b
	2	7	3	1	6
	3	5	2	2	4
	9	4	1	7	2
x_4	2	7	3	1	6
	–1	–9	–4	0	–8
	–5	–45	–20	0	–40
x_4	0	–11	–5	1	–10
x_1	1	9	4	0	8
	0	0	0	0	0

Третье уравнение является линейной комбинацией двух других уравнений, его можно отбросить, $r = 2$. Выпишем систему, соответствующую последней расширенной матрице.

$$\begin{cases} \quad -11x_2 \; -5x_3 \; +x_4 \; = \; -10, \\ x_1 \; +9x_2 \; +4x_3 \qquad = \; 8. \end{cases}$$

Переменные x_1 и x_4 — базисные, x_2 и x_3 — свободные.

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3, \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{cases} \text{— общее решение системы.}$$

Из него можно получить бесконечно много частных решений.

$$\begin{cases} x_2 = x_3 = 1, \\ x_1 = -5, \\ x_4 = 6. \end{cases} \quad \overline{x}_{\text{част1}}(-5, 1, 1, 6); \quad \begin{cases} x_2 = 1, \\ x_3 = 0, \\ x_1 = -1, \\ x_4 = 1. \end{cases} \quad \overline{x}_{\text{част2}}(-1, 1, 0, 1); \text{ и т.д.}$$

Из последней таблицы Гаусса можно выписать базисное решение:

$$\begin{cases} x_2 = x_3 = 0, \\ x_1 = 8, \\ x_4 = -10. \end{cases} \quad \overline{x}_{\text{баз1}}(8, 0, 0, -10).$$

Количество базисных решений будет равно количеству базисов, которые можно составить из четырех переменных x_1, x_2, x_3, x_4 по две в каждом базисе. Это количество равно $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.

Возможные базисы:

$$\begin{array}{ll} x_1x_2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_4 \\ x_1x_4 & x_3x_4. \end{array}$$

Чтобы получить другие базисные решения, необходимо привести систему к другому единичному базису. Выполняют операцию однократного замещения. Для этого в базис вводят одну из свободных переменных вместо одной из базисных. Выбирают ключевой элемент в столбце свободной переменной и выполняют преобразование Жордана. Выберем в последней таблице в качестве ключевого элемента коэффициент 4 при свободной переменной x_3.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_4	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	1	0	2

Переменные x_3 и x_4 — базисные, x_2 и x_1 — свободные. Получаем другое базисное решение: $\overline{x}_{\text{баз}2}(0,0,2,0)$ — оно же является опорным решением.

8.27. Нахождение неотрицательных базисных решений системы

Так как не всякое базисное решение является опорным, то возникают вычислительные затруднения при нахождении опорных решений системы обычным методом Гаусса. Приходится находить все базисные решения и из них выбирать опорные. Существует алгоритм, позволяющий сразу находить опорные решения.

1. При заполнении исходной таблицы Гаусса все свободные члены делают неотрицательными.

2. Ключевой элемент выбирается специальным образом:

а) в качестве ключевого столбца выбирают любой столбец коэффициентов при неизвестных, если в нем есть хотя бы один положительный элемент;

б) в качестве ключевой строки берется та, у которой отношение свободного члена к положительному элементу ключевого столбца минимально.

На пересечении ключевой строки и ключевого столбца находится ключевой элемент. Далее проводят обычное преобразование Жордана.

8.28. Однородные системы линейных уравнений

Пусть дана однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Рассмотрим соответствующую неоднородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (8.2)$$

С помощью матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times 1}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

эти системы можно записать в матричном виде.

$$A\bar{x} = \bar{0}. \quad (8.3)$$

$$A\bar{x} = \bar{b}. \quad (8.4)$$

Справедливы следующие ***свойства решений однородной и неоднородной систем.***

<u>Теорема 8.23</u>. Линейная комбинация решений однородной системы (8.1) является решением однородной системы.

Доказательство. Пусть $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ — решения однородной системы. Рассмотрим $\bar{t} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z}$, где α, β и γ — некоторые произвольные числа. Так как $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ являются решениями, то $A\bar{x} = \bar{0}$, $A\bar{y} = \bar{0}$ и $A\bar{z} = \bar{0}$. Найдем $A\bar{t}$.

$$A\bar{t} = A\cdot(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z}) = A\cdot\alpha\bar{x} + A\cdot\beta\bar{y} + A\cdot\gamma\bar{z} =$$
$$= \alpha A\bar{x} + \beta A\bar{y} + \gamma A\bar{z} = \alpha\bar{0} + \beta\bar{0} + \gamma\bar{0} = \bar{0}.$$

$A\bar{t}=\bar{0}\Rightarrow\bar{t}$ является решением системы.

Теорема 8.24. Разность двух решений неоднородной системы (8.2) является решением однородной системы (8.1).

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — решения системы. Рассмотрим $\bar{t}=\bar{x}-\bar{y}$.

$$A\bar{x}=\bar{b}\,,\ A\bar{y}=\bar{b}\,.$$

$$A\bar{t}=A(\bar{x}-\bar{y})=A\bar{x}-A\bar{y}=\bar{b}-\bar{b}=\bar{0}\,.$$

$A\bar{t}=\bar{0}\Rightarrow\bar{t}$ является решением однородной системы.

Теорема 8.25. Сумма решения однородной системы с решением неоднородной системы есть решение неоднородной системы.

Доказательство. Пусть $\bar{x}$ — решение однородной системы, $\bar{y}$ — решение неоднородной системы. Покажем, что $\bar{t}=\bar{x}+\bar{y}$ — решение неоднородной системы.

$$A\bar{x}=\bar{0}\,,\ A\bar{y}=\bar{b}\,.$$

$$A\bar{t}=A(\bar{x}+\bar{y})=A\bar{x}+A\bar{y}=\bar{b}+\bar{0}=\bar{b}\,.$$

$A\bar{t}=\bar{b}\Rightarrow\bar{t}$ является решением неоднородной системы.

8.29. Совместность однородной системы

Рассмотрим однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\qquad\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как имеет тривиальное (нулевое) решение $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Выясним, когда данная система имеет нетривиальное решение.

Теорема 8.26. Однородная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, меньше числа неизвестных.

Доказательство. Пусть система имеет нетривиальное решение. Это может быть тогда и только тогда, когда найдутся числа c_1, c_2, …, c_n, не все равные нулю, при подстановке которых в систему мы получим m тождеств. Эти m тождеств можно записать в виде

$$c_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}+\dots+c_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система векторов-столбцов матрицы A линейно зависима. А это может быть тогда и только тогда, когда ранг системы векторов-столбцов меньше n, т.е. $r(A) < n$.

Следствие. Однородная система с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, равен нулю.

Доказательство. Так как $r(A) < n$, то столбцы матрицы линейно зависимы и, следовательно, определитель матрицы равен нулю.

8.30. Общее решение однородной системы

Система (8.1) всегда имеет тривиальное решение. Если ранг матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных, меньше числа неизвестных, то система (8.1) имеет нетривиальные решения.

1) $r(A) = n$ — система (8.1) имеет только тривиальное решение:

2) $r(A) = r < n$ — система (8.1) имеет нетривиальные решения.

Количество свободных переменных во втором случае будет равно $n - r$, а базисных r. Давая свободным переменным произвольные значения, мы будем получать различные решения системы (8.1), т.е. любому вектору размерности $n - r$

$$(c_{r+1},\ c_{r+2},\ \dots,\ c_n)$$

будет соответствовать решение системы (8.1)

$$(c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_r,\ c_{r+1},\ \dots,\ c_n).$$

Определение 8.51. Фундаментальной системой решений однородной системы (8.1) называется максимальная линейно независимая система решений системы (8.1). Фундаментальная система содержит $n-r$ линейно независимых решений системы (8.1).

Чтобы получить фундаментальную систему решений, нужно в $(n-r)$-мерном пространстве взять линейно независимую систему из $n-r$ векторов и по ним построить соответствующие решения системы (8.1). Полученные решения будут образовывать фундаментальную систему решений $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-r}$. Так как эта система максимальна, то любое решение системы (8.1) можно представить в виде линейной комбинации решений фундаментальной системы $\overline{x} = \alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \ldots + \alpha_{n-r}\overline{x}_{n-r}$. Полученное выражение является общим решением однородной системы (8.1).

Пример 8.25. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \end{cases}$ $r(A) = 2$,

x_1, x_2 — базисные, x_3, x_4, x_5 — свободные. Два последних уравнения линейно выражаются через два первых, поэтому их можно отбросить:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные.

Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым. Результат разделим на 8.

Умножим первое уравнение на 2, второе на –3 и сложим полученные уравнения. Результат разделим на 8.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{8}x_3 + \dfrac{3}{8}x_4 - \dfrac{1}{2}x_5, \\ x_2 = \dfrac{7}{8}x_3 - \dfrac{25}{8}x_4 - \dfrac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

В качестве значений свободных переменных возьмем координаты векторов трехмерного единичного базиса.

$(1,0,0)$, $\bar{x}_1 = \left(\frac{19}{8}; \frac{7}{8}; 1; 0; 0\right)$;

$(0,1,0)$, $\bar{x}_2 = \left(\frac{3}{8}; -\frac{25}{8}; 0; 1; 0\right)$; — фундаментальная система решений,

$(0,0,1)$, $\bar{x}_3 = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0; 0; 1\right)$.

$\bar{x} = \alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \alpha_3\bar{x}_3$ — общее решение однородной системы.

Сумма общего решения однородной системы (8.1) с любым решением неоднородной системы (8.2) является общим решением неоднородной системы (8.2).

8.31. Применение линейной алгебры в экономике

8.31.1. Производственные показатели

Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в следующей таблице.

Вид изделий	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

По приведенным данным составим четыре вектора, характеризующие весь производственный цикл:

$\bar{q} = (20, 50, 30, 40)$ — вектор ассортимента;

$\bar{s} = (5, 2, 7, 4)$ — вектор расхода сырья;

$\bar{t} = (10, 5, 15, 8)$ — вектор затрат рабочего времени;

$\bar{p} = (30, 15, 45, 20)$ — ценовой вектор.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие скалярные произведения вектора ассортимента $\bar{q}$ на три других вектора:

$$S = \bar{q}\,\bar{s} = 100 + 100 + 210 + 160 = 570 \text{ кг},$$

$$T = \bar{q}\,\bar{t} = 1220 \text{ ч}, P = \bar{q}\,\bar{p} = 3500 \text{ ден. ед.}$$

8.31.2. Расход сырья

Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы A:

$$\begin{array}{rcl} \text{Вид сырья} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \text{Вид изделия.} \end{array}$$

Требуется найти затраты сырья каждого вида при заданном плане выпуска каждого вида изделия: соответственно, 60, 50, 35 и 40 ед.

Составим вектор-план выпуска продукции:

$$\bar{q} = (60, 50, 35, 40).$$

Тогда решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому его виду: этот вектор затрат вычисляется как произведение вектора $\bar{q}$ на матрицу A:

$$\bar{q}A=(60,50,35,40)\begin{pmatrix}2&3&4&5\\1&2&5&6\\7&2&3&2\\4&5&6&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120+50+245+160\\180+100+70+200\\240+250+105+240\\300+300+70+320\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}575\\550\\835\\990\end{pmatrix}.$$

8.31.3. Конечный продукт отрасли

Отрасль состоит из n предприятий, выпускающих по одному виду продукции каждое: обозначим объем продукции i-го предприятия через x_i. Каждое из предприятий отрасли для обеспечения своего производства потребляет часть продукции, выпускаемой им самим и другими предприятиями. Пусть a_{ij} — доля продукции i-го предприятия, потребляемая j-м предприятием для обеспечения выпуска своей продукции объема x_j. Найдем величину y_i — количество продукции i-го предприятия, предназначенной для реализации вне данной отрасли (объем конечного продукта). Эта величина легко может быть подсчитана по формуле

$$y_i=x_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j;\quad i=1,2,...,n.$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу порядка n, описывающую внутреннее потребление отрасли

$$A=(a_{ij});\quad i,j=1,2,...,n.$$

Тогда вектор конечного продукта является решением матричного уравнения

$$\bar{x}-A\bar{x}=\bar{y},$$

с использованием единичной матрицы E получаем

$$(E-A)\bar{x}=\bar{y}.$$

Пример 8.26. Пусть вектор выпуска продукции отрасли и матрица внутреннего потребления имеют, соответственно, вид

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}300\\200\\400\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}1&0{,}2\\0{,}2&0{,}3&0{,}1\\0{,}2&0{,}2&0{,}6\end{pmatrix}.$$

Получим вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли, состоящей из трех предприятий:

$$\overline{y} = (E - A)\overline{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

8.31.4. Прогноз выпуска продукции

Пусть $C = (c_{ij});\quad i = 1, 2, ..., m,\quad j = 1, 2, ..., n,$ — матрица затрат сырья m видов при выпуске продукции n видов. Тогда при известных объемах запаса каждого вида сырья, которые образуют соответствующий вектор

$$\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_m),$$

вектор-план $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ выпуска продукции определяется из решения системы m уравнений с n неизвестными:

$$C\overline{x}^{\mathrm{T}} = \overline{q}^{\mathrm{T}},$$

где индекс «т» означает транспонирование вектора-строки в вектор-столбец.

Пример 8.27. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех видов. Необходимые характеристики производства представлены следующими данными:

Вид сырья	**Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.**			**Запас сырья, вес. ед.**
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Задачи такого рода типичны при прогнозах и оценках функционирования предприятий, экспертных оценках проектов освоения месторождений полезных ископаемых, а также в планировании микроэкономики предприятий.

Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2 и x_3. Тогда при условии полного расхода запасов каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах):

$$x_1 = 150, \quad x_2 = 250, \quad x_3 = 100 .$$

8.31.5. Линейная модель многоотраслевой экономики

Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период; в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем следующие обозначения:

x_i — общий объем продукции i-й отрасли;

x_{ij} — объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью при производстве объема продукции x_i;

y_i — объем продукции i-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый продукт конечного потребления.

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i-й отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности, или простого сложения) балансовые соотношения имеют вид

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти уравнения называются *соотношениями баланса*. Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, в дальнейшем будем иметь в виду стоимостный баланс.

В. Леонтьевым на основании анализа экономики США в период перед второй мировой войной был установлен важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = x_{ij} / x_j$ меняются очень незначительно и могут рассматриваться как постоянные числа. Это явление становится понятным в свете того, что технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объем потребления j-й отраслью продукции i-й отрасли при производстве своей продукции объема x_j есть технологическая константа.

В силу указанного факта можно сделать следующее допущение: для производства продукции j-й отрасли объема x_j нужно использовать продукцию i-й отрасли объема $a_{ij}\, x_i$, где a_{ij} — постоянное число. При таком допущении технология производства принимается *линейной*, а само это допущение называется *гипотезой линейности*. При этом числа a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат*. Согласно гипотезе линейности

$$x_{ij} = a_{ij} x_j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Соотношения баланса можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение векторы-столбцы объемов произведенной продукции (вектор валового выпуска), объемов продукции конечного потребления (вектор конечного потребления) и матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ \bar{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений в матричной форме имеет вид

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}.$$

Обычно это соотношение называют *уравнением линейного межотраслевого баланса*. Вместе с описанием матричного представления это уравнение носит название *модели Леонтьева.*

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать в двух целях. В первом (наиболее простом) случае, когда известен вектор валового выпуска $\bar{x}$, требуется рассчитать вектор конечного потребления $\bar{y}$. Во втором случае уравнение межотраслевого баланса используется для целей планирования со следующей формулировкой задачи: для периода T (например, год) известен вектор конечного потребления $\bar{y}$, требуется определить вектор $\bar{x}$ валового выпуска.

8.31.6. Линейная модель торговли

Процесс взаимных закупок товаров анализируется с использованием понятий собственного числа и собственного вектора матрицы. Будем полагать, что бюджеты n стран, которые мы обозначим, соответственно, x_1, x_2, ..., x_n, расходуются на покупку товаров. Рассмотрим *линейную модель обмена*, или *модель международной торговли.*

Пусть a_{ij} — доля бюджета x_j, которую j-я страна тратит на закупку товаров у i-й страны. Введем матрицу коэффициентов a_{ij}:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, если весь бюджет расходуется только на закупки внутри страны и вне ее (это можно трактовать как торговый бюджет), справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица A с данным свойством, в силу которого сумма элементов ее любого столбца равна единице, называется *структурной матрицей торговли.* Для i-й страны общая выручка от внутренней и внешней торговли выражается формулой

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n .$$

Условие сбалансированной (бездефицитной) торговли формулируется естественным образом: для каждой страны ее бюджет должен быть не больше выручки от торговли, т.е. $P_i \geq x_i$, или

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n .$$

Докажем, что в условиях не может быть знака неравенства. Действительно, сложим все эти неравенства при i от 1 до n. Группируя слагаемые с величинами бюджетов x_j, получаем

$$\begin{aligned} &x_1(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots \\ &+ x_n(a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \end{aligned}.$$

Нетрудно заметить, что в скобках стоят суммы элементов матрицы A по ее столбцам, которые равны единице по условию. Стало быть, мы получили неравенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq x_1 + x_2 + \ldots + x_n ,$$

откуда следует, что возможен только знак равенства.

Таким образом, условия принимают вид равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \qquad \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases}$$

Введем вектор бюджетов $\bar{x}$, каждая компонента которого характеризует бюджет соответствующей страны. Тогда систему уравнений можно записать в матричной форме:

$$A\bar{x} = \bar{x}.$$

Это уравнение означает, что собственный вектор структурной матрицы A, отвечающий ее собственному значению $\lambda = 1$, состоит из бюджетов стран бездефицитной международной торговли. Перепишем уравнение в виде, позволяющем определить $\bar{x}$:

$$(A - E)\bar{x} = \bar{0}.$$

Пример 8.28. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270.$$

Решение. Необходимо найти собственный вектор $\bar{x}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$ заданной структурной матрицы A, т.е. решить уравнение, которое в нашем случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой системы равен трем, то одна из неизвестных является свободной переменной, остальные выражаются через нее. Решая систему методом Гаусса, находим компоненты собственного вектора $\overline{x}$:

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Подставив найденные значения в заданную сумму бюджетов, определим величину c:

$$c = 1210.$$

Откуда окончательно получаем искомые величины бюджетов стран при бездефицитной торговле:

$$x_1 = 1400, \quad x_2 = 1460, \quad x_3 = 2200, \quad x_4 = 1210.$$

Глава 9

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аналитической геометрией называют раздел математики, в котором геометрические задачи решаются алгебраическими методами.

9.1. Декартова прямоугольная система координат

Определение 9.1. Осью называется прямая, на которой:

1) выбрана начальная точка («начало» — точка О);
2) указано (стрелкой) положительное направление отсчета;
3) выбран масштаб.

Определение 9.2. Декартовой прямоугольной системой координат на плоскости (в пространстве) называют две (три) взаимно перпендикулярные оси с общим началом. Первая ось OX называется осью абсцисс, вторая ось OY — осью ординат (третья ось OZ — осью аппликат).

Каждой точке плоскости (пространства) ставится в соответствие упорядоченная пара (тройка) действительных чисел — координат данной точки.

Определение 9.3. Уравнением линии на плоскости называется уравнение с двумя переменными, такое, что только координаты любой точки, лежащей на этой линии, удовлетворяют данному уравнению.

9.1.1. Расстояние между двумя точками на плоскости

Даны две точки на плоскости (рис. 9.1) с координатами $A\ (x_1, y_1)$ и $B\ (x_2, y_2)$.

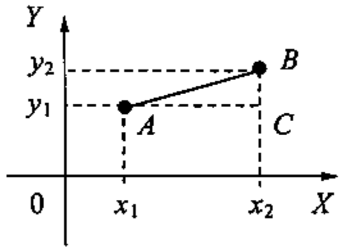


Рис. 9.1

Из треугольника ABC:

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

9.1.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Найдем на отрезке M_1M_2 (рис. 9.2) точку N, которая делила бы данный отрезок в отношении λ: $\frac{M_1N}{NM_2} = \lambda$.

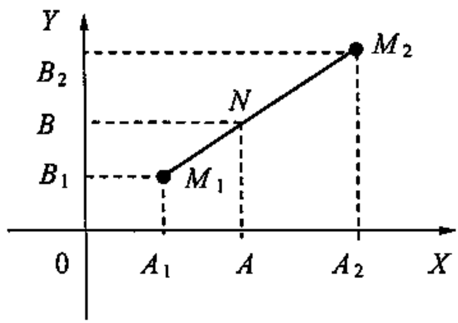


Рис. 9.2

По теореме о пропорциональности отрезков прямых, пересеченных рядом параллельных прямых, получим

$$\frac{M_1N}{NM_2} = \frac{A_1A}{AA_2} = \frac{B_1B}{BB_2} = \lambda\,,$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda\,,$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda,$$

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \qquad y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y,$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении, находятся по этим формулам.

Если $\lambda = 1$, то деление отрезка производится пополам:

$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ — формулы для нахождения координат середины отрезка.

9.2. Общее уравнение прямой

Теорема 9.1. Всякое невырожденное уравнение первой степени с двумя переменными определяет на плоскости некоторую прямую, и наоборот.

$Ax + By + C = 0$ — общее уравнение прямой,

$A^2 + B^2 \neq 0$ — условие невырожденности.

Рассмотрим различные случаи расположения прямой на плоскости в зависимости от коэффициентов общего уравнения.

1)	$C = 0$,	$Ax + By = 0$	— прямая проходит через начало координат;
	$A = 0$,	$By + C = 0$	— прямая проходит параллельно оси OX;
	$B = 0$,	$Ax + C = 0$	— прямая проходит параллельно оси OY;
2)	$A = C = 0$,	$By = 0$	— прямая совпадает с осью OX;
	$B = C = 0$,	$Ax = 0$	— прямая совпадает с осью OY.

Расстояние от точки M_0 (x_0, y_0) до прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

9.3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Предположим, что прямая расположена под углом φ к оси OX и отсекает от оси OY отрезок в b единиц. Составим уравнение этой прямой (рис. 9.3).

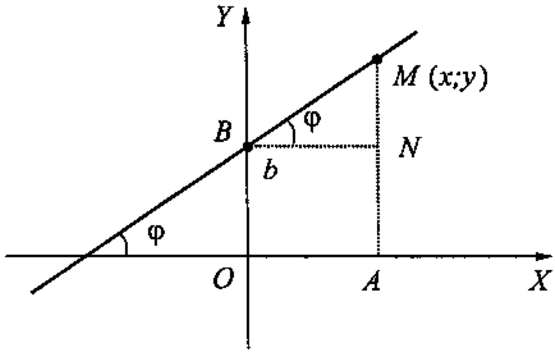


Рис. 9.3

Возьмем произвольную точку M $(x,\ y)$, лежащую на этой прямой, и найдем уравнение, связывающее переменные x и y. Из рисунка видно: $AM = AN + NM$, где $AM = y$, $AN = b$. Из треугольника BMN: $MN = BN \cdot \mathrm{tg}\ \varphi$. Обозначим $\mathrm{tg}\ \varphi = k$ и назовем его угловым коэффициентом прямой. $MN = k \cdot x$.

Подставляя в равенство

$$AM = AN + NM$$

выражения отрезков

$$AM = y,\ AN = b,\ MN = k{\cdot}x;$$

получим

$y = k{\cdot}x + b$ — уравнение прямой с угловым коэффициентом.

9.4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Предположим, что прямая проходит через точку M_1 (x_1,y_1) и образует с осью OX угол φ. Составим уравнение этой прямой (рис. 9.4).

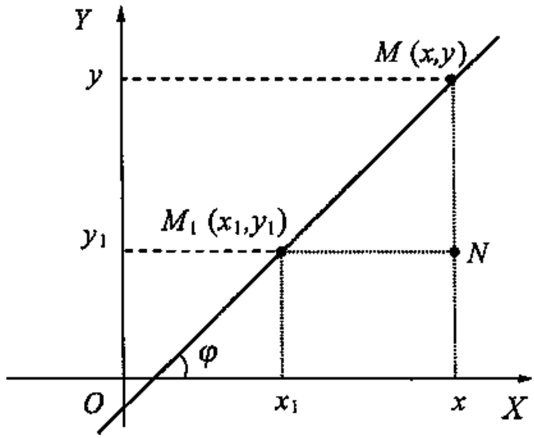


Рис. 9.4

Будем искать уравнение прямой в виде уравнения с угловым коэффициентом: $y = k \cdot x + b$. Угловой коэффициент прямой можно найти, зная угол наклона $k = \operatorname{tg} \varphi$. Возьмем произвольную точку M (x, y), лежащую на этой прямой, и найдем уравнение, связывающее переменные x и y. Так как точки M и M_1 лежат на прямой, то их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y = k \cdot x + b,$$

$$y_1 = k \cdot x_1 + b.$$

Вычитая эти равенства, получим:

$y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$ — уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

9.5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Даны две точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Составим уравнение прямой, проходящей через две эти точки (рис. 9.5).

Из треугольника M_1M_2M:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{M_2M}{M_1M} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

— угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки.

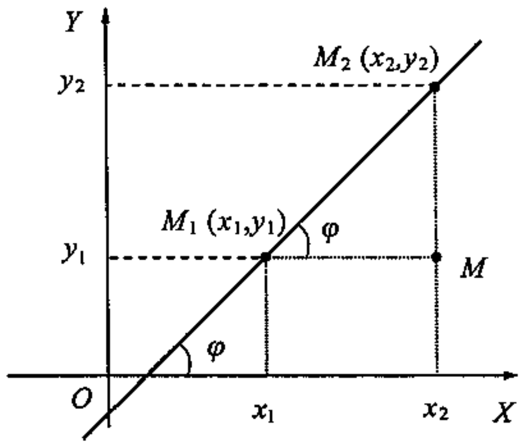


Рис. 9.5

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку M_1 и в данном направлении $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$:

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1),$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Если точки имеют различные абсциссы и ординаты, то, умножая обе части последнего равенства на величину

$$\frac{1}{y_2 - y_1},$$

получим

$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ — уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Если точки имеют одинаковые абсциссы или одинаковые ординаты, то используют формулу $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$.

Предположим, что прямая отсекает на осях координат отрезки a и b единиц соответственно (рис. 9.6).

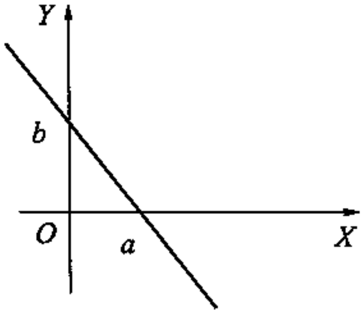


Рис. 9.6

Составим уравнение этой прямой. Используем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(a,0)$ и $B(0,b)$.

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

$$\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1,$$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ — уравнение прямой в отрезках на осях.

9.6. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Определение 9.4. Углом между двумя прямыми I и II называется угол, отсчитываемый в положительном направлении от прямой I к прямой II (рис. 9.7).

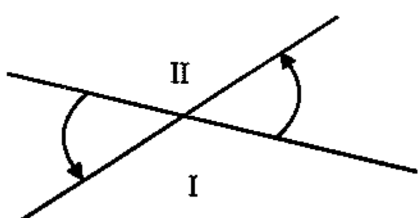


Рис. 9.7

Пусть даны две прямые, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами

$$y = k_1 \cdot x + b_1, \quad y = k_2 \cdot x + b_2.$$

Найдем угол между первой и второй прямыми. Обозначим углы наклона прямых φ_1 и φ_2. Тогда

$$k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1, \qquad k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2.$$

Проведем через точку пересечения прямую, параллельную оси OX (рис. 9.8).

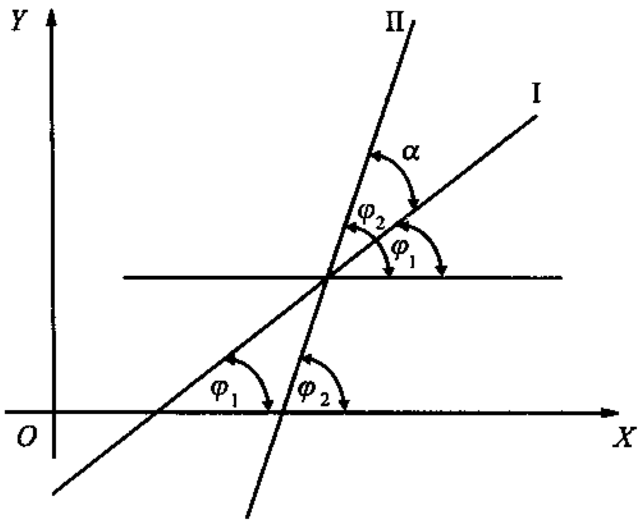


Рис. 9.8

$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}.$$

— формула для вычисления угла между двумя прямыми.

1. Предположим, что прямые параллельны:

$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \text{tg}\,\alpha = 0 \;\Rightarrow$
$k_1 = k_2$ — условие параллельности прямых.

2. Предположим, что прямые перпендикулярны:

$\alpha = 90^0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha$ не существует $\Rightarrow \text{ctg}\,\alpha = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ — условие перпендикулярности прямых.

9.7. Эллипс

Определение 9.5. Геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, называется эллипсом.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — каноническое уравнение эллипса.}$$

Исследуем форму эллипса.

1. Найдем точки пересечения с осями.

$$OX\colon y=0, \qquad x=\pm a;$$

$$OY\colon x=0, \qquad y=\pm b;$$

$$A(a;0);\ B(-a;0);\ C(0;b);\ D(0;-b).$$

Определение 9.6. Точки A, B, C, D называются вершинами эллипса.

2. Из вида уравнения следует, что линия симметрична относительно осей OX и OY и начала координат.

3. $$\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}\le 1,\\[2mm] \dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l}x^2\le a^2,\\ y^2\le b^2,\end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l}x\in[-a;a],\\ y\in[-b;b].\end{array}$$

Следовательно, кривая расположена в прямоугольнике со сторонами $2a$ и $2b$.

Построим данную кривую (рис. 9.9).

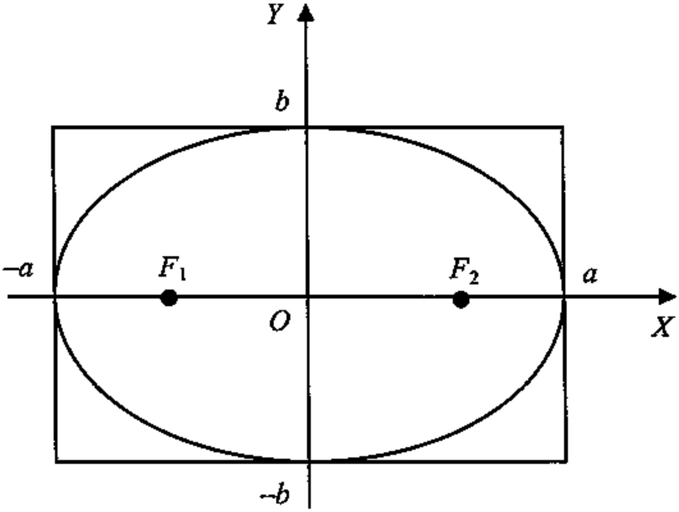


Рис. 9.9

Определение 9.7. Отношение фокусного расстояния к большой оси эллипса называется эксцентриситетом эллипса.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Определение 9.8. Параметр a называется большой полуосью эллипса, параметр b называется малой полуосью эллипса.

9.8. Окружность

Определение 9.9. Геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до данной точки O, называемой центром, есть величина постоянная, называется окружностью.

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=R$$
$$x^2+y^2=R^2$$
— каноническое уравнение окружности.

Окружность является частным случаем эллипса, когда большая и малая полуоси равны, $c = 0$, фокусы сливаются в центр. Эксцентриситет окружности равен нулю.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = 0\,.$$

9.9. Гипербола

Определение 9.10. Геометрическое место точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, называется гиперболой.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — каноническое уравнение гиперболы.}$$

Исследуем форму гиперболы.

1. Найдем точки пересечения с осями.

$$OX\colon y = 0,\ \frac{x^2}{a^2} = 1,\ \ x = \pm a\,,\ A(a;0)\ ,\ B(-a;0).$$

$$OY\colon x = 0,\ \ -\frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad y \in \varnothing\,.$$

Определение 9.11. Точки A и B называются вершинами гиперболы.

2. Из вида уравнения следует, что линия симметрична относительно осей OX, OY и начала координат.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow\ x^2 \geq a^2\ \Rightarrow\ x \in (-\infty;-a] \cup [a;+\infty)\,.$

Следовательно, кривая расположена вне прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$.

Построим данную кривую (рис. 9.10).

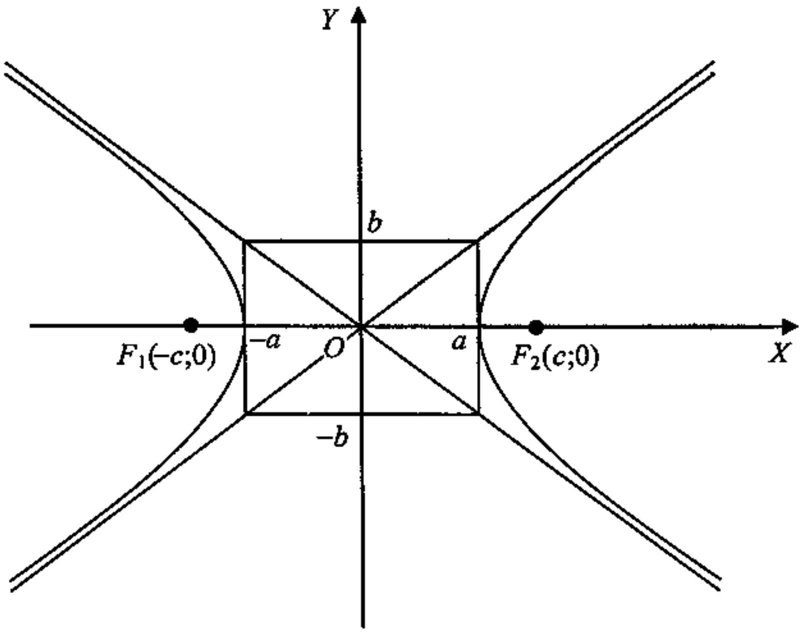


Рис. 9.10

Определение 9.12. Параметр a называется действительной полуосью гиперболы, а параметр b называется мнимой полуосью.

Определение 9.13. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются асимптотами гиперболы.

При возрастании x гипербола неограниченно приближается к асимптотам.

Определение 9.14. Отношение фокусного расстояния гиперболы к ее действительной оси называется эксцентриситетом.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Определение 9.15. Кривые эллипс, гипербола, окружность называются кривыми второго порядка с эксцентриситетом, причем для окружности $\varepsilon = 0$, для эллипса $\varepsilon \in (0;1)$ и для гиперболы $\varepsilon \in (1;+\infty)$. При $\varepsilon = 1$ гипербола вырождается в две параллельные прямые.

9.10. Парабола

Определение 9.16. Геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой, именуется параболой.

$$y^2 = 2px$$

— каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси OX.

Исследуем форму параболы.

1. Найдем точки пересечения с осями.

$$OX,\ OY: \qquad y = 0,\ x = 0,\ \mathrm{O}(0;0).$$

Определение 9.17. Точка О называется вершиной параболы.

2. Из вида уравнения следует, что линия симметрична относительно оси OX.

3. $x \in [0;+\infty)$. Следовательно, кривая расположена правее оси OY.

Построим данную кривую (рис. 9.11).

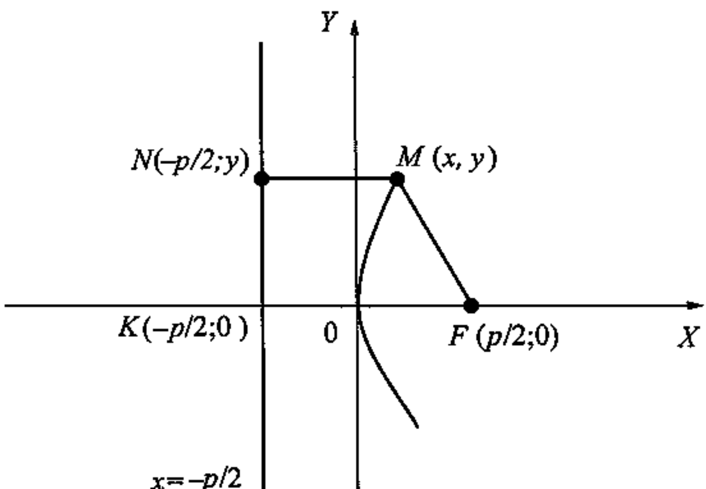


Рис. 9.11

Если парабола симметрична относительно OY и имеет верщину в начале координат, то ее каноническое уравнение имеет вид $x^2 = 2py$ (рис. 9.12).

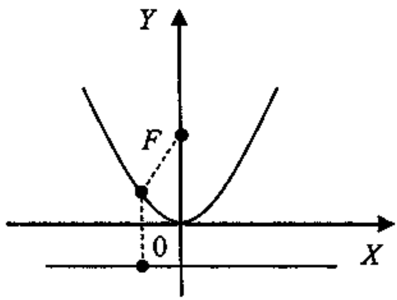


Рис. 9.12

9.11. Параллельный перенос системы координат

Предположим, что система координат XOY перенесена параллельно себе так, что начало координат сместилось в точку $M(a;b)$. Найдем связь между координатами любой точки в старой и новой системе координат (рис. 9.13). Возьмем произвольную точку N. В плоскости XOY она имеет координаты $N(x;\ y)$, в плоскости $X'O'Y'$ она имеет координаты $N(x';y')$.

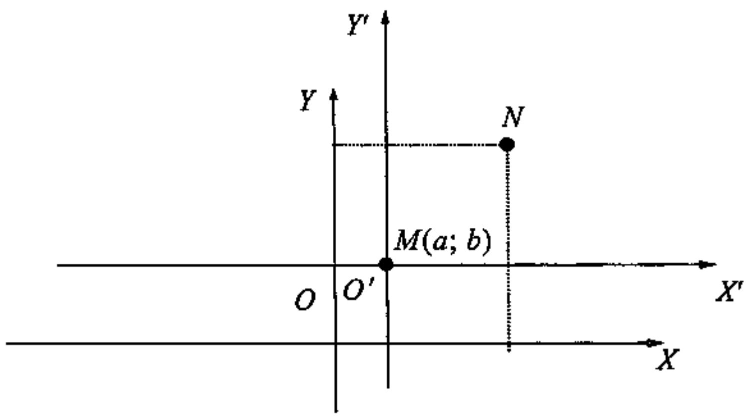


Рис. 9.13

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b. \end{cases}$$

— преобразование координат при параллельном переносе; выражение старых координат через новые и новых через старые.

Пример 9.1. Рассмотрим уравнение:

$$x^2-2y^2+2x-12y-33=0,$$

$$(x^2+2x+1)-1-2(y^2+6y+9)+18-33=0,$$

$$(x+1)^2-2(y+3)^2=16.$$

Совершим параллельный перенос по формулам

$$\begin{cases} x'=x+1, \\ y'=y+3. \end{cases}$$

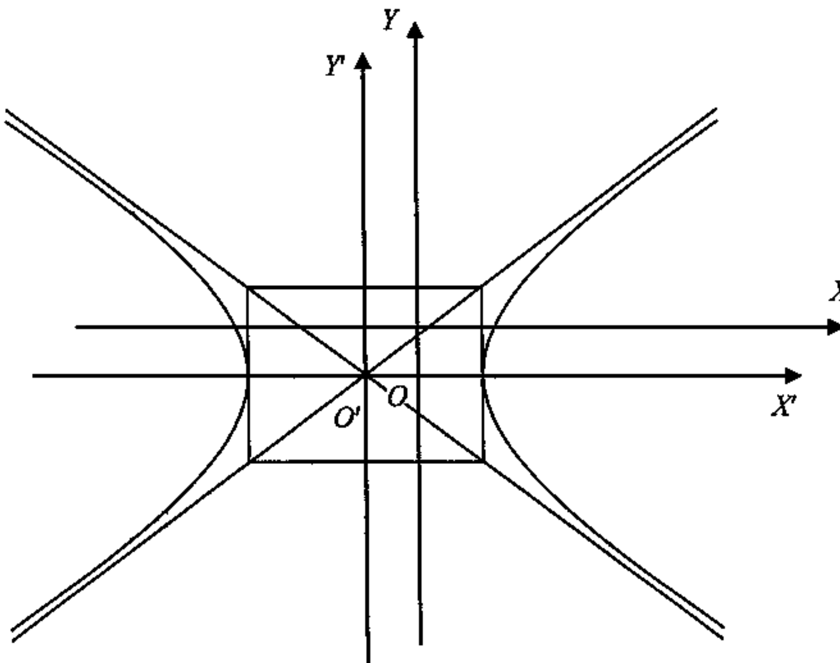
При этом начало координат перейдет в точку $O'(-1;-3)$. В новой системе координат уравнение примет вид

$$(x')^2-2(y')^2=16,$$

$$\frac{(x')^2}{16}-\frac{(y')^2}{8}=1.$$

В новой системе координат $X'OY'$ получено каноническое уравнение гиперболы с параметрами $a=4$, $b=2\sqrt{2}$.

Построим старые и новые оси, а также саму кривую.



Пример 9.2. Рассмотрим квадратный трехчлен

$y = ax^2 + bx + c$.

Построим его график. Для этого преобразуем уравнение

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) =$$
$$= a\left(\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Введем новые координаты по формулам

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{b}{2a}, \\ y' = y - \dfrac{4ac - b^2}{4a}. \end{cases}$$

Тогда в новой системе координат $X'O'Y'$, полученной параллельным переносом осей координат с новым центром в точке $O'(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, уравнение примет вид

$$(x')^2 = 2py',$$

где $p = 1/2a$.

Таким образом, графиком квадратного трехчлена является парабола с вершиной в точке $O'(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ с осью симметрии $x = -\frac{b}{2a}$, параллельной оси OY.

9.12. Поворот системы координат

Предположим, что прямоугольную систему координат повернули на угол α в положительном направлении и получили новую систему координат $X'O'Y'$ (рис. 9.14).

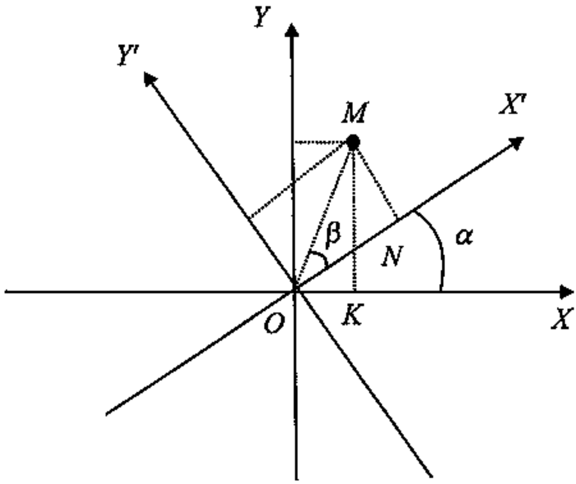


Рис. 9.14

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha, \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

Эти соотношения описывают преобразование координат при повороте, они выражают старые координаты через новые. Из этих соотношений можно выразить новые координаты. Выражение новых координат через старые:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha, \\ y' = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha. \end{cases}$$

Пример 9.3. Кривая второго порядка задана уравнением

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32.$$

Приведем его к каноническому виду. Сделаем преобразование: поворот на угол $\alpha = 45^0$.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'). \end{cases}$$

Найдем уравнение этой линии в новой системе координат $X'OY'$:

$$\frac{5}{2}(x' - y')^2 - \frac{6}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{5}{2}(x' + y')^2 = 32,$$

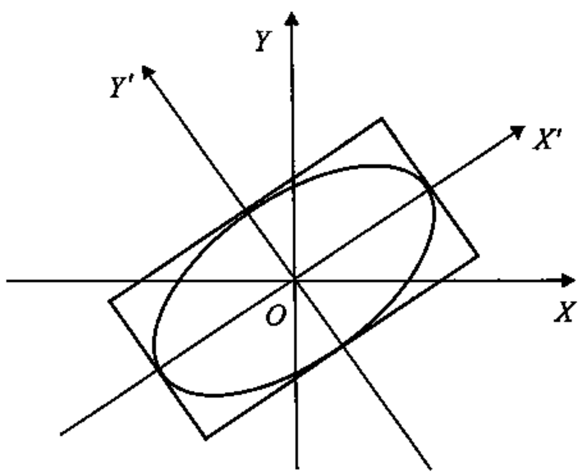
$$5x'^2 - 10x'y' + 5y'^2 - 6x'^2 + 6y'^2 + 5x'^2 + 5y'^2 + 10x'y' = 64,$$

$$4x'^2 + 16y'^2 = 64,$$

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса с параметрами

$$a = 4 \text{ и } b = 2.$$



Пример 9.4. Построим график дробно-линейной функции

$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$.

Преобразуем выражение для функции:

$$y=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a\left[\left(x+\frac{d}{c}\right)+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right]}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Обозначим $m=\dfrac{bc-ad}{c^2}$ и введем новые координаты

$$\begin{cases} x'=x+\dfrac{d}{c}, \\ y'=y-\dfrac{a}{c}. \end{cases}$$

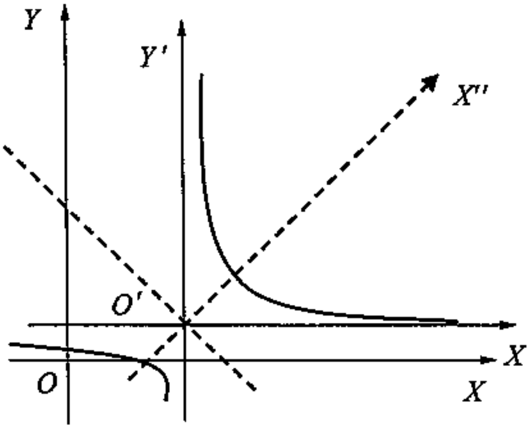
Эти уравнения описывают параллельный перенос системы координат. Центр координат перейдет в точку $O'(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c})$. В новой системе координат уравнение имеет вид: $x'y'=m$. Сделаем преобразование: поворот на угол $\alpha=45^0$.

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x''-y''), \\ y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x''+y''). \end{cases}$$

Найдем уравнение этой линии в новой системе координат $X''O'Y''$:

$$\frac{(x'')^2}{2m}-\frac{(y'')^2}{2m}=1.$$

Мы получили каноническое уравнение равносторонней гиперболы с асимптотами $y''=\pm x''$.



Таким образом, графиком дробно-рациональной функции является равносторонняя гипербола.

9.13. Уравнение плоскости в пространстве

Теорема 9.2. Всякое невырожденное уравнение первой степени с тремя переменными описывает некоторую плоскость в пространстве, и наоборот: всякая плоскость может быть описана таким уравнением.

$Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение плоскости,

$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ — условие невырожденности.

Рассмотрим различные случаи расположения плоскости в пространстве в зависимости от коэффициентов общего уравнения.

1. $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$ — проходит через начало координат;
   $A = 0$, $By + Cz + D = 0$ — параллельна оси OX;
   $B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$ — параллельна оси OY;
   $C = 0$, $Ax + By + D = 0$ — параллельна оси OZ;
2. $A = D = 0$, $By + Cz = 0$ — содержит OX;
   $B = D = 0$, $Ax + Cz = 0$ — содержит OY;
   $C = D = 0$, $Ax + By = 0$ — содержит OZ;
   $A = B = 0$, $Cz + D = 0$ — параллельна плоскости XOY;

$A = C = 0,\quad By + D = 0$ — параллельна плоскости XOZ;
$B = C = 0,\quad Ax + D = 0$ — параллельна плоскости YOZ;

3. $A = B = D = 0,\quad Cz = 0$ — совпадает с плоскостью XOY;
$A = C = D = 0,\quad By = 0$ — совпадает с плоскостью XOZ;
$B = C = D = 0,\quad Ax = 0$ — совпадает с плоскостью YOZ.

Расстояние от точки M_0 (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

9.14. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть плоскость проходит через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярна вектору $\bar{n}(M, N, L)$. Вектор $\bar{n}(M, N, L)$ называется вектором нормали к плоскости.

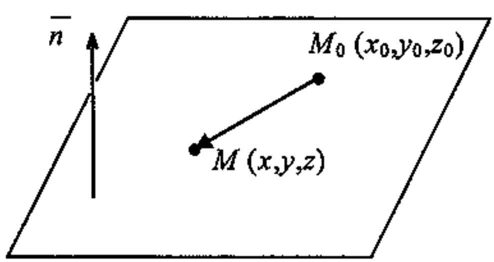


Рис. 9.15

Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$, лежащую в этой плоскости (рис. 9.15), и найдем связь между координатами x, y, z в виде уравнения. Рассмотрим вектор $\overline{M_0M}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.

Векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{n}$ ортогональны. Следовательно, $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$.

$$M(x-x_0)+N(y-y_0)+L(z-z_0)=0$$

— уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору. Если раскрыть скобки в этом уравнении, то его можно привести к виду

$$Mx+Ny+Lz+K=0,$$

где $K=-Mx_0-Ny_0-Lz_0$.

Следовательно, если плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то вектор $\bar{n}(A,B,C)$ является вектором нормали к плоскости.

9.15. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Даны две плоскости, заданные общими уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Они имеют нормальные векторы:

$$\bar{n}_1(A_1,\ B_1,\ C_1),$$
$$\bar{n}_2(A_2,\ B_2,\ C_2).$$

1. Если плоскости параллельны, то векторы нормалей коллинеарны.

$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ — условие параллельности плоскостей.

2. Если плоскости перпендикулярны, то векторы нормалей ортогональны.

$\bar{n}_1\ \bar{n}_2=0,$

$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ — условие перпендикулярности плоскостей.

9.16. Каноническое уравнение прямой в пространстве

Пусть прямая проходит через точку $M_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и параллельна вектору $\bar{a}\ (m\ ,n,\ l)$. Составим уравнение этой прямой (рис. 9.16).

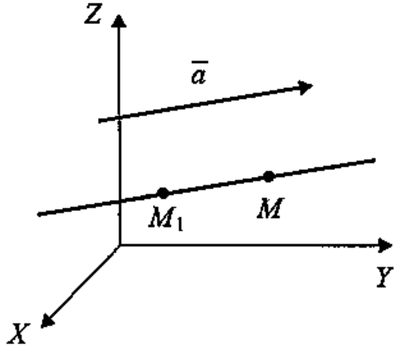


Рис. 9.16

Возьмем произвольную точку M $(x,\ y,\ z)$ на этой прямой и найдем зависимость между x, y, z. Построим вектор

$$\overline{M_1M}(x-x_1;y-y_1;z-z_1).$$

Векторы $\overline{M_1M}$ и $\bar{a}$ коллинеарны.

$\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{l}$ — каноническое уравнение прямой в пространстве.

9.17. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки

Пусть прямая проходит через две точки M_1 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$. Составим ее уравнение. Рассмотрим вектор $\overline{M_1M_2}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$. Данная прямая параллельна этому вектору и проходит через точку M_1 (x_1, y_1, z_1). Используя каноническое уравнение, получаем

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

— уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

Глава 10

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

10.1. Понятие квадратичной формы

Определение 10.1. Скалярная функция векторного аргумента, которая представляет собой однородный многочлен второго порядка, называется квадратичной формой.

$$F(\bar{x}) = A(\bar{x},\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in E^n,$$

$$A : E^n \to R.$$

Определение 10.2. Матрица, составленная из коэффициентов квадратичной формы a_{ij}, называется матрицей квадратичной формы.

Пример 10.1. $A : E^3 \to R$, $\bar{x} \in E^3$.

$$A(\bar{x},\bar{x}) = 5x_1^2 + 7x_2^2 - 9x_3^2 + \overbrace{16x_1x_2}^{8x_1x_2+8x_2x_1} - 10x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -5 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & 2 & -9 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Матрица квадратичной формы симметрична относительно главной диагонали.

Теорема 10.1. Любая симметричная квадратная матрица порядка n имеет n действительных собственных значений и собственных векторов. Собственные векторы симметричной матрицы попарно ортогональны.

Следовательно, собственные векторы матрицы образуют базис в пространстве E^n.

Определение 10.3. Рангом квадратичной формы называется ранг матрицы A.

Определение 10.4. Квадратичная форма $A(\overline{x},\overline{x})$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любого $\overline{x} \in E^n$

$$A(\overline{x},\overline{x}) > 0 \ (< 0).$$

Теорема 10.2 **(критерий Сильвестра).** Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все левые верхние угловые миноры матрицы A являются положительными, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$a_{11} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

10.2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Рассмотрим квадратичную форму

$$F(\overline{x}) = A(\overline{x},\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\right).$$

Выпишем ее матрицу и вектор-столбец переменных.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}; \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Тогда квадратичную форму можно представить в виде

$A\left(\overline{x},\overline{x}\right)=\overline{x}^{\mathrm{T}}A\overline{x}$ — матричная запись квадратичной формы.

Пример 10.2. $A(\overline{x},\overline{x}):E^3 \to R.$

$A(\overline{x},\overline{x}) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2.$

$$A\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}, \qquad \overline{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{2\times 1}.$$

$A(\overline{x},\overline{x}) = \overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x} =$

$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}_{1\times 2}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 3x_2 & -3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}_{1\times 2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{2\times 1} =$$

$$= \left(3x_1^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_2 + 5x_2^2\right)_{1\times 1} = \left(3x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2\right)_{1\times 1}.$$

Определение 10.5. Если в некотором базисе квадратичная форма не содержит смешанных произведений переменных, т.е.

$$A(\overline{x},\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2,$$

то этот базис называют каноническим базисом данной квадратичной формы, а вид $A(\overline{x},\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$ называют каноническим видом данной квадратичной формы.

Определение 10.6. Нормированием вектора называется нахождение вектора того же направления единичной длины.

$$\overline{a}_n = \frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|} = \left(\frac{a_1}{\left|\overline{a}\right|}\ \frac{a_2}{\left|\overline{a}\right|}\ \ldots\ \frac{a_n}{\left|\overline{a}\right|}\right).$$

<u>Теорема 10.3.</u> Любую симметричную матрицу можно представить в виде $A = U^{\mathrm{T}}DU$, где D — диагональная матрица, у которой на диагонали расположены собственные числа матрицы A; U — матрица, составленная из нормированных собственных векторов матрицы A. Каждый вектор является столбцом.

Следовательно, любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью некоторого ортогонального преобразования координат. Для всякой квадратичной формы существует канонический базис.

$$A(\overline{x},\overline{x}) = \overline{x}^{\mathrm{T}} A\overline{x} = \overline{x}^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} D U \overline{x} = (U\overline{x})^{\mathrm{T}} D (U\overline{x}).$$

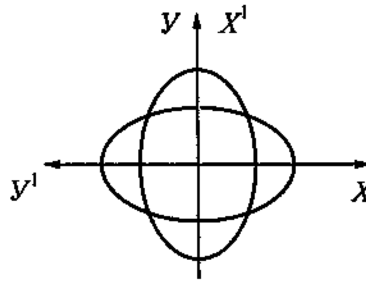
Если ввести новые переменные по формуле $\overline{y} = U\overline{x}$, то квадратичная форма примет следующий вид:

$A(\overline{y},\overline{y}) = \overline{y}^{\mathrm{T}} D\overline{y}$ — канонический вид квадратичной формы.

Из данного равенства видно, что коэффициентами в каноническом виде являются собственные числа матрицы A.

Теорема 10.4. **(закон инерции квадратичных форм).** В любом каноническом виде квадратичной формы количество положительных и отрицательных коэффициентов постоянно.

Пример 10.3. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.



Если повернуть систему координат на 90^0, то уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

В этих базисах оба слагаемых со знаком « + ».

Пример 10.4. Приведем квадратичную форму

$A(\overline{x},\overline{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ к каноническому виду. Выпишем ее матрицу.

$$A\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Найдем собственные значения матрицы квадратичной формы. Решим характеристическое уравнение.

$|A - \lambda E| = 0$,

$$\left|\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda)-(-2)(-2)(7-\lambda)-4(5-\lambda)=0,$$

$$(30-11\lambda+\lambda^2)(7-\lambda)-28+4\lambda-20+4\lambda=0,$$

$$210-77\lambda+7\lambda^2-30\lambda+11\lambda^2-\lambda^3+8\lambda-48=0,$$

$$\lambda^3-18\lambda^2-99\lambda-162=0.$$

Корни данного уравнения являются делителями свободного члена. Разложим его на простые множители и подберем один из корней.

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$\lambda = 3$ — является корнем. Разделим многочлен на линейный множитель $\lambda - 3$.

$$\begin{array}{rrrr|l} -\lambda^3 & -18\lambda^2 & +99\lambda & -162 & \lambda-3 \\ \underline{\lambda^3} & \underline{-3\lambda^2} & & & \overline{\lambda^2-15\lambda+54} \\ - & -15\lambda^2 & +99\lambda & & \\ & \underline{-15\lambda^2} & \underline{+45\lambda} & & \\ & - & 54\lambda & -162 & \\ & & \underline{54\lambda} & \underline{-162} & \\ & & & 0 & \end{array}$$

Найдем корни остатка.

$$\lambda^2-15\lambda+54=0,$$

$$\lambda_1=9, \quad \lambda_2=6.$$

Получили три собственных значения матрицы. Найдем соответствующие им собственные векторы. Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 3$, найдем из уравнения $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$.

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + 7x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = -1$,

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_3 = -c, \\ x_2 = 2c, \\ x_1 = 2c. \end{cases}$$

Итак, собственному значению $\lambda = 3$ соответствует собственный вектор $\overline{x}_1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Пронормируем собственный вектор. $|\overline{x}_1| = \sqrt{4+4+1} = 3$, $\overline{x}_{1n} = \left(\frac{2}{3}, \ \frac{2}{3}, \ -\frac{1}{3}\right)$.

Аналогично находятся векторы $\overline{x}_{2n}, \overline{x}_{3n}$. Базис, составленный из векторов $\overline{x}_{1n}, \overline{x}_{2n}, \overline{x}_{3n}$, является каноническим для данной квадратичной формы.

$$\bar{x}_{1n} = \left(\frac{2}{3},\ \ \frac{2}{3},\ \ -\frac{1}{3}\right),$$

$$\bar{x}_{2n} = \left(-\frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3},\ \ \frac{2}{3}\right),$$

$$\bar{x}_{3n} = \left(\frac{2}{3},\ \ -\frac{1}{3},\ \ \frac{2}{3}\right).$$

В этом базисе квадратичная форма имеет вид

$$A(\bar{y},\bar{y}) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

Формула преобразования координат имеет вид $\overline{y} = U\overline{x}$,

где $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}_{3\times 3}^{\mathrm{T}}$.

Глава 11

МНОГОМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

11.1. Евклидово пространство. Выпуклые множества

Определение 11.1. Упорядоченная совокупность из n действительных чисел $\overline{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-мерной точкой.

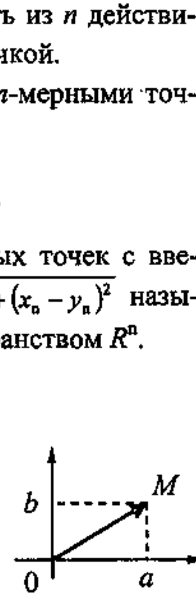
Определение 11.2. Расстоянием между двумя n-мерными точками $\overline{x}(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\overline{y}(y_1, \ldots, y_n)$ называется величина

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

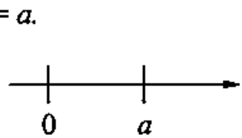
Определение 11.3. Совокупность всех n-мерных точек с введенной на ней метрикой $d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$ называется n-мерным евклидовым (метрическим) пространством R^n.

Пример 11.1.

R^2. $M(a,b)$ — точка из R^2, в линейном векторном пространстве E^2 аналогично обозначается вектор $\overline{OM}(a,b)$. Между точками и векторами с одинаковыми координатами существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать их одинаково: $\overline{x}$.

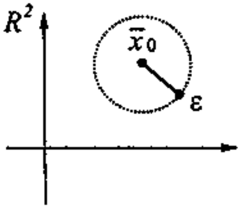


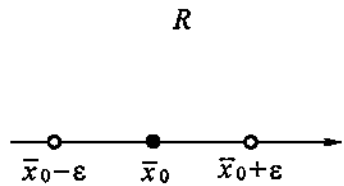
Пример 11.2. R^1. $\overline{x} = a$.



Определение 11.4. ε-окрестностью точки $\overline{x}_0$ в R^n называется множество точек $\overline{x}$, удовлетворяющих условию $d(\overline{x}, \overline{x}_0) < \varepsilon$.

Пример 11.3.



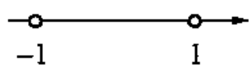


Определение 11.5. Множество $A \subset R^n$ называется открытым, если любая точка входит в него вместе с некоторой окрестностью.

Определение 11.6. Множество $B \subset R^n$ называется замкнутым, если оно является дополнением до некоторого открытого множества.

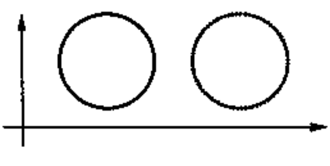
$$B \text{ — замкнутое} \Leftrightarrow R^n \setminus B \text{ — открытое.}$$

Пример 11.4. R^1.



$(-1,1)$ — открытое,
$[-1,1]$ — замкнутое.
Открытые множества: (a,b), $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$, R, $\varnothing$.
Замкнутые множества: $[a,b]$, $(-\infty,a]$, $[a,+\infty)$, R, $\varnothing$.

Пример 11.5. R^2.



Без границ – открытое множество, с границами — замкнутое.

Определение 11.7. Отрезком в R^n, соединяющим точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$, называется множество точек, удовлетворяющее условию

$$\bar{z} = t\bar{x} + (1-t)\bar{y}, t \in [0,1].$$

Определение 11.8. Множество $A \subset R^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками, входящими в него, оно содержит отрезок, их соединяющий (рис. 11.1 а, б), остальные множества называются невыпуклыми (рис. 11.1 в, г).

Рис. 11.1

Определение 11.9. Точка $x \in A \subset R^n$ называется угловой точкой множества A (рис. 11.2), если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком лежащего в A.

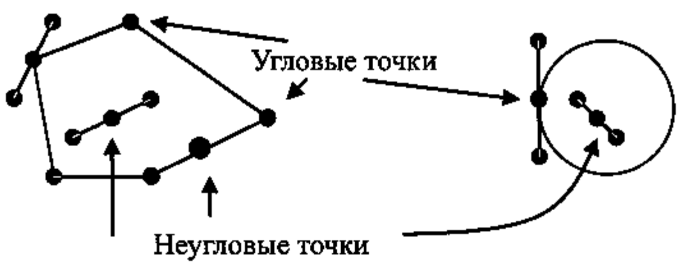


Рис. 11.2

Теорема 11.1. Пересечение конечного числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Доказательство. Пусть A и B — выпуклые множества.

Докажем, что $A \cap B$ — выпуклое множество.

Пусть $x, y \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subset A \\ x, y \in B \Rightarrow [x, y] \subset B \end{Bmatrix} \Rightarrow [x, y] \subset A \cap B$.

Следовательно, $A \cap B$ — выпуклое множество.

11.2. Решение систем линейных неравенств

Определение 11.10. Совокупность точек пространства R^n, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, называется $(n-1)$-мерной гиперплоскостью в n-мерном пространстве.

Пример 11.6.

$n = 2$, $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, $Ax + By + C = 0$ — уравнение прямой на плоскости.

$n = 3$ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$, $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости в пространстве.

Теорема 11.2. Гиперплоскость делит все пространство на два полупространства. Полупространство является выпуклым множеством.

Пересечение конечного числа полупространств является выпуклым множеством.

Теорема 11.3. Решением линейного неравенства с n неизвестными

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$$

является одно из полупространств, на которые все пространство делит гиперплоскость

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Рассмотрим систему из m линейных неравенств с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Решением каждого неравенства системы является некоторое полупространство. Решением системы будет являться пересечение всех полупространств. Это множество будет замкнутым и выпуклым.

11.3. Решение систем линейных неравенств с двумя переменными

Пусть дана система из m линейных неравенств с двумя переменными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases}$$

Решением каждого неравенства будет являться одна из полуплоскостей, на которые всю плоскость разбивает соответствующая прямая. Решением системы будет являться пересечение этих полуплоскостей. Данная задача может быть решена графически на плоскости $X_1 0 X_2$.

Пример 11.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \le \dfrac{5}{2}, \\ x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \ge 0. \end{cases}$

Решим каждое неравенство графически.

1. $x_1 + x_2 \le 3,$ построим соответствующую прямую.

$$x_1 + x_2 = 3,$$

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} = 1.$$

Подставим координаты точки (0,0) в неравенство: $0 \le 3$ (истина).

2. $x_1 + x_2 \ge 1,$ $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 1, \\ \dfrac{x_1}{1} + \dfrac{x_2}{1} = 1. \end{matrix}$

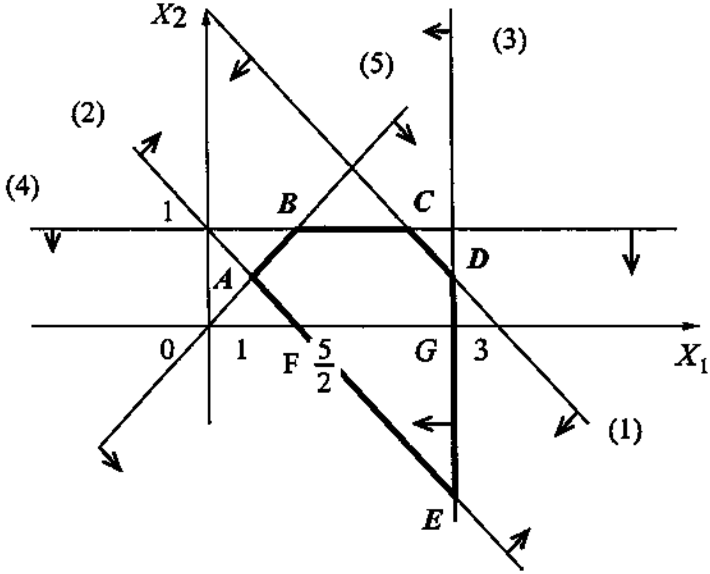
Подставим координаты точки (0,0) в неравенство: $0 \ge 1$ (ложь).

3. $x_1 \le \dfrac{5}{2},$ $\begin{matrix} x_1 = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{x_1}{\frac{5}{2}} = 1. \end{matrix}$

Подставим координаты точки (0,0) в неравенство: $0 \le \dfrac{5}{2}$ (истина).

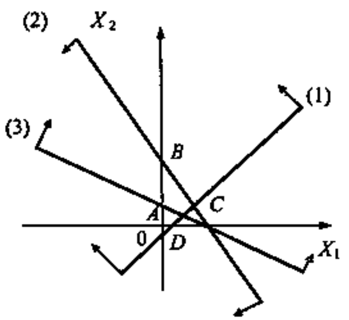
4. $x_2 \le 1,$ $\begin{matrix} x_2 = 1, \\ \dfrac{x_2}{1} = 1, \end{matrix}$ (0,0), $0 \le 1$ (истина).

5. $x_1 - x_2 \ge 0,$ $x_1 = x_2,$ (1,0), $1 \ge 0$ (истина).

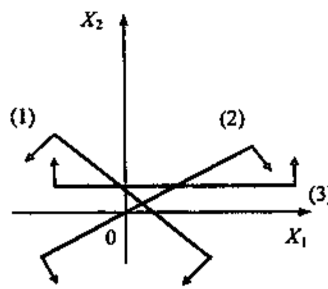


ABCDE — область возможных решений (ОВР),
ABCDGF — область допустимых решений (ОДР).

Возможны другие конфигурации области возможных решений и области допустимых решений.



Область возможных решений неограничена,
ABCD — область допустимых решений.



Область возможных решений — пустое множество.

11.4. Представление выпуклого многогранника

Определение 11.11. Замкнутое выпуклое ограниченное множество в R^n, имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклым n-мерным многогранником.

Определение 11.12. Замкнутое выпуклое неограниченное множество в R^n , имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклой многогранной областью.

Определение 11.13. Множество $A \subset R^n$ называется ограниченным, если найдется n-мерный шар, содержащий это множество.

Определение 11.14. Выпуклой линейной комбинацией точек $\overline{x}_1,...,\overline{x}_к$ называется выражение $t_1\overline{x}_1+t_2\overline{x}_2+...+t_к\overline{x}_k$, где $t_i \geq 0$, $i=\overline{1,k}$; $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i = 1$.

Теорема 11.4. **(теорема о представлении выпуклого многогранника).** Любую точку выпуклого многогранника можно представить в виде выпуклой линейной комбинации его угловых точек.

11.5. Допустимые решения системы линейных уравнений и неравенств

Пусть дана система из m линейных уравнений и неравенств с n неизвестными.

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ... \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{ln}x_n = b_l, \end{matrix}\right\rangle l \\ \left.\begin{matrix} a_{l+1}x_1 + a_{l+12}x_2 + ... + a_{l+1n}x_n \leq b_{l+1}, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{matrix}\right\rangle m-l \end{cases}$$

Определение 11.15. Точка $\overline{x} \in R^n$ называется возможным решением системы, если ее координаты удовлетворяют уравнениям и неравенствам системы. Совокупность всех возможных решений называется областью возможных решений (ОВР) системы.

Определение 11.16. Возможное решение, координаты которого неотрицательны, называется допустимым решением системы. Множество всех допустимых решений называется областью допустимых решений (ОДР) системы.

Теорема 11.5. ОДР является замкнутым, выпуклым, ограниченным (или неограниченным) подмножеством в R^n.

Теорема 11.6. Допустимое решение системы является опорным тогда и только тогда, когда эта точка является угловой точкой ОДР.

Теорема 11.7. **(теорема о представлении ОДР).** Если ОДР — ограниченное множество, то любое допустимое решение можно представить в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек ОДР (в виде выпуклой линейной комбинации опорных решений системы).

Теорема 11.8. **(теорема о существовании опорного решения системы).** Если система имеет хотя бы одно допустимое решение (ОДР $\neq \varnothing$), то среди допустимых решений существует хотя бы одно опорное решение.

Глава 12

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Понятие функции многих переменных

Пусть даны множества $D \subset \boldsymbol{R}^n$ и $I \subset \boldsymbol{R}$.

Определение 12.1. Если каждой точке $\overline{x}(x_1, x_2, ..., x_n)$ множества D ставится в соответствие единственное число y из I, то говорят, что задана функция n переменных $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Множество D называется областью определения функции $D(y) = D$, множество I называется множеством значений функции $I(y) = I$.

Если зафиксировать любые $n - 1$ переменные, то функция многих переменных превращается в функцию одной переменной. $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$, …, $x_n = c_n$; $y = f(x_1, c_2, \ldots, c_n)$ — функция одной переменной x_1.

Пример 12.1.

$z(x, y) = 8xy^2 - 5y^3$ — функция двух переменных,

$u(x, y, z) = \sin(xy) - \cos(yz)$ — функция трех переменных.

Определение 12.2. Графиком функции двух переменных (рис. 12.1) $z = f(x, y)$ называется множество точек (x, y, z) 3-мерного пространства, таких, что $(x, y) \in D(z)$ и $z = f(x, y)$. Любую точку графика можно записать в виде $(x, y, f(x, y))$.

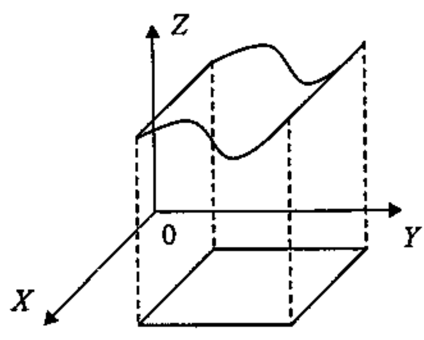


Рис. 12.1

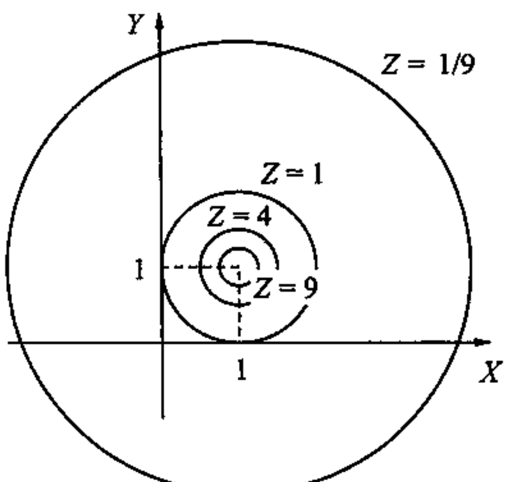
Определение 12.3. Графиком функции n переменных называется n-мерная гиперповерхность в пространстве R^{n+1}, точки которой имеют вид

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Определение 12.4. Линией уровня функции двух переменных называется линия на плоскости XOY, принадлежащая $D(z)$, в каждой точке которой функция принимает одно и то же значение.

Уравнение линии уровня: $f(x, y) = c$, где c — произвольное число. На данной линии уровня значение функции $z = c$. Линий уровня бесконечно много, и через каждую точку области определения можно провести линию уровня.

Пример 12.2 . $z(x,y) = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2}$,



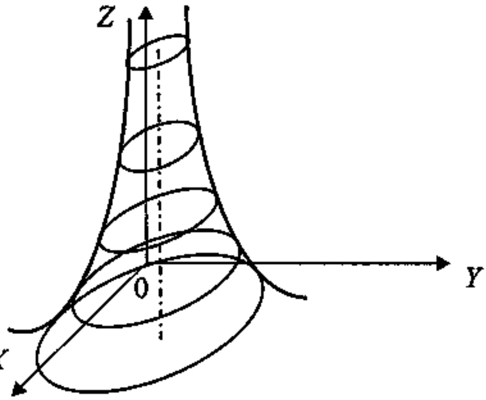
$D(z) = \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$.

$c = 1$, $\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 1$, $z = 1$.

$c = 4$, $\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 4$, $z = 4$.

$c = 9$, $\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-1)^2} = 9$, $z = 9$.

Используя линии уровня, можно построить график функции.



Определение 11.5. Поверхностью уровня функции n переменных $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется гиперповерхность в пространстве R^n, входящая в $D(y)$, в каждой точке которой значение функции одно и то же. Уравнение поверхности уровня $f(x_1, x_2, ..., x_n) = c$. На поверхности уровня значение функции постоянно: $y = c$.

12.2. Непрерывность функции многих переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2$; $z = f(x,y)$. Возьмем точку $(x_0,y_0) \in D(y) \subset R^2$. Дадим аргументу x в данной точке приращение Δx, зафиксировав y_0. Выражение

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

называется частным приращением функции по переменной x.

Аналогично, фиксируя x_0 и давая аргументу y приращение Δy, мы получим частное приращение по перемеииной y.

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Выражение

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

называется полным приращением функции.

Определение 11.6. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке $(x_0,y_0) \in D(y)$, если она определена в этой точке и малым приращениям аргументов соответствует малое полное приращение функции.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) - f(x_0,y_0) \right) = 0 .$$

Определение 11.7. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной на множестве $A \subset D(z)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

12.3. Частные производные функции многих переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2;\ z = f(x,y)$.

Определение 11.8. Частной производной функции $z = f(x,y)$ в точке $(x_0, y_0) \in D(y)$ по соответствующей переменной называется предел отношения частного приращения функции по этой переменной к приращению этой переменной, когда приращение переменной стремится к нулю (если этот предел существует и конечен).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

При введении частной производной по любой переменной остальные переменные были фиксированы. Данное определение совпадает с определением производной функции одной переменной. Следовательно, частную производную можно найти, зафиксировав все переменные, кроме одной, считая их постоянными. Производная находится как производная функции одной переменной, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(f(x, y_0)\right).$$

Все правила и формулы, справедливые для производной функции одной переменной, остаются справедливыми и для частных производных.

Пример 12.3. $z(x,y)=3x^3y^2-7xy^8+5$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=9x^2y^2-7y^8,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=6x^3y-56xy^7.$$

Пример 12.4. $u(x,y,z)=x\ln\frac{y}{z}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\ln\frac{y}{z},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{z}{y}\cdot\frac{1}{z}=\frac{x}{y},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-x\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z^2}=-\frac{x}{z}.$$

12.4. Полный дифференциал

Определение 12.7. Полным дифференциалом функции многих переменных называется главная линейная относительно приращений аргументов часть малого полного приращения функции.

Рассмотрим функцию двух переменных $n=2$; $z=f(x,y)$. Если приращение функции $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ можно представить в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y,$$

где α,β — бесконечно малые функцин ири $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$, соответственно, то выражение $dz=A\Delta x+B\Delta y$ называется полным дифференциалом функции двух переменных.

Теорема 12.1. Полный дифференциал равен сумме попарных произведений частных производных на дифференциалы соответствующих переменных.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пример 12.5. $u=\ln(x\cdot y\cdot z)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yz}{xyz}=\frac{1}{x};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xz}{xyz}=\frac{1}{y};\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{xy}{xyz}=\frac{1}{z};$$

$$dz=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}.$$

12.5. Производная по направлению

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2$; $z = f(x, y)$. Под направлением мы будем понимать любой вектор $\bar{l}$ на плоскости (рис. 12.2).

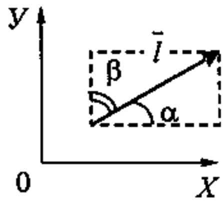


Рис. 12.2

Определение 12.8. Направляющими косинусами данного направления $\bar{l}$ называются косинусы углов, которые данное направление образует с положительными направлениями осей координат. Направляющие косинусы данного направления — $\cos\alpha$, $\cos\beta$.

Направляющие косинусы любого направления в любом пространстве обладают следующим свойством: сумма квадратов направляющих косинусов равна единице.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + ... = 1.$$

На плоскости имеем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Если рассмотреть вектор $\bar{l}_0$, координатами которого являются направляющие косинусы данного направления, то этот вектор сонаправлен с вектором $\bar{l}$ и имеет единичную длину.

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и направление $\bar{l}$. Переместим точку M_0 вдоль направления $\bar{l}$ на величину Δl в точку M_1 (рис.12.3). Тогда функция и аргумент получат соответствующие приращения.

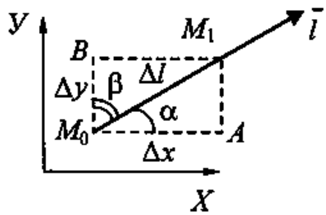


Рис. 12.3

Функция получит приращение, которое называется приращением функции в данном направлении:

$$\Delta_l z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

Из треугольника $M_0 M_1 A$: $\qquad \Delta x = \Delta l \cos\alpha$.

Из треугольника $M_0 M_1 B$: $\qquad \Delta y = \Delta l \cos\beta$.

$$\Delta_l z = f(x_0 + \Delta l \cos\alpha, y_0 + \Delta l \cos\beta) - f(x_0, y_0).$$

Определение 12.9. Предел отношения приращения функции в данном направлении к приращению направления, когда приращение направления стремится к нулю, называется производной функции в данном направлении (если этот предел существует и конечен);

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta l \cos\alpha, y_0 + \Delta l \cos\beta) - f(x_0, y_0)}{\Delta l}.$$

Если направление $\bar{l}$ совпадает с направлением оси OX, то производная по направлению совпадает с частной производной по переменной x. Аналогично производная по направлению оси OY совпадает с частной производной по переменной y.

Теорема 12.2. Производная по направлению равна сумме попарных произведений частных производных в данной точке на направляющие косинусы данного направления.

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Пример 12.6.

Найти производную функции $z(x,y)=3x^2y-4x^2y^3$ в точке $M(1, 2)$ в направлении $\bar{l}\,(4, -3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy-8y^3x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2-12y^2x^2,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=12-64=-52,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=3-48=-45,$$

$$\left|\bar{l}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$$\bar{l}_0=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right),$$

$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos\beta=-\frac{3}{5},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\mathrm{M}_0}=-52\cdot\frac{4}{5}+45\cdot\frac{3}{5}=-14{,}6\,.$$

12.6. Градиент функции многих переменных

Рассмотрим функцию трех переменных $n = 3$, $u = f(x, y, z)$.

Определение 12.10. Градиентом функции многих переменных в данной точке называется вектор, координаты которого равны частным производным по соответствующим аргументам, вычисленным в данной точке.

$$\mathrm{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Теорема 12.3. Производная функции в данном направлении равна проекции градиента на данное направление.

Доказательство.

Даны функция $u = f(x,y,z)$ и некоторое направление $\bar{l}$, заданное направляющими косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Единичный вектор данного направления — $\bar{l}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Производная по направлению в данной точке равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \operatorname{grad} u \cdot \bar{l}_0 = = \left|\operatorname{grad} u\right| \cdot \left|\bar{l}_0\right| \cdot \cos\varphi = \left|\operatorname{grad} u\right| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между градиентом и направлением (рис. 12.4).

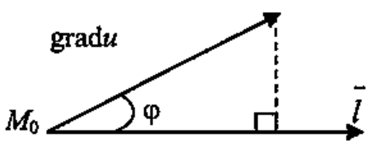


Рис. 12.4

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u\right| \cdot \cos\varphi = pr_{\bar{l}}(\operatorname{grad} u).$$

Следствие. Градиент функции в данной точке показывает направление наискорейшего возрастания функции. Модуль градиента совпадает с максимальной скоростью возрастания функции в данной точке.

Доказательство. Из теоремы следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u\right| \cos\varphi.$$

Выясним, в каком из направлений в данной точке функция растет быстрее всего. Максимум будет достигаться, когда $\varphi = 0$, т.е. направление совпадает с направлением градиента.

$$\max_{l} \frac{\partial u}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} u\right|.$$

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2$, $z = f(x, y)$.

Теорема 12.4. Градиент функции в каждой точке области определения направлен по нормали к линии уровня (нормалью к плоской кривой называется перпендикуляр к касательной, проведенной в точку касания) (рис. 12.5).

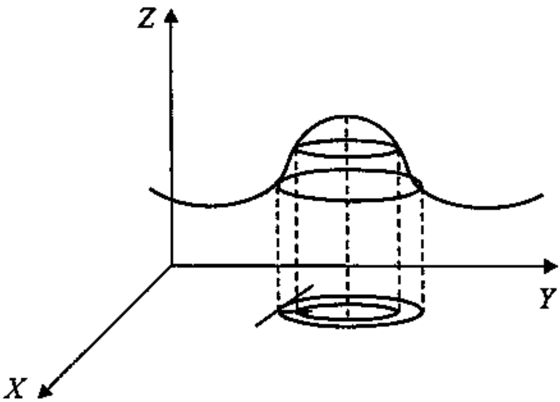


Рис. 12.5

12.7. Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2$, $z = f(x,y)$. Предположим, что функция имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y),$$

которые являются функциями двух переменных. Их называют частными производными первого порядка. Предположим, что они дифференцируемы.

Определение 12.11. Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка.

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad f''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$ — смешанные производные.

Если полученные функции являются дифференцируемыми, то частные производные от них называются частными производными третьего порядка. Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) \text{ и т.д.}$$

Определение 12.12. Частной производной n-го порядка называется частная производная от частной производной $(n-1)$-го порядка. Функция двух переменных имеет 2^n производных n-го порядка.

Частная производная порядка p функции $y = f(x_1, x_2, ... x_n)$ имеет вид

$$\frac{\partial^p y}{\partial x_1^{K_1} \cdot \partial x_2^{K_2} \cdots \partial x_n^{K_n}}, \text{ где } \sum_{i=1}^{n} K_i = p .$$

Теорема 12.5. Если частные производные первого порядка некоторой функции непрерывно дифференцируемы, то результаты смешанного дифференцирования равны.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} .$$

Пример 12.6. $z(x,y) = 5x^3 y - 4x^2 y^5$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2 y - 8xy^5, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3 - 20x^2 y^4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 30xy - 8y^5, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 15x^2 - 40xy^4, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 15x^2 - 40xy^4,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -80x^2 y^3,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -160xy^3.$$

12.8. Экстремумы функций многих переменных

Рассмотрим функцию двух переменных $n = 2$, $z = f(x, y)$.

Определение 12.13. Точка $(x_0, y_0) \in R^2$ называется точкой локального максимума (минимума) функции, если найдется некоторая окрестность данной точки, для всех точек которой выполняется условие $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ ($f(x,y) > f(x_0,y_0)$).

Определение 12.14. Точки локального максимума и минимума называются точками экстремума.

<u>Теорема 12.6.</u> **(необходимое условие экстремума функции).** Если точка (x_0, y_0) является точкой локального экстремума функции, то в этой точке частные производные равны нулю или не существуют.

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in R^2$ — точка экстремума функции. Зафиксируем y_0 и рассмотрим функцию одной переменной.

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Точка x_0 является точкой локального экстремума функции $g(x)$, следовательно, в этой точке производная $g'(x) = 0$ или не существует, тогда частная производная $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{dg}{dx}(x_0)$ равна нулю или не существует.

Аналогично доказывается, что $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$ или не существует.

Определение 12.15. Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются стационарными точками функции многих переменных.

Необходимое условие экстремума не является достаточным, т.е. не каждая критическая точка является точкой экстремума.

Например, функция $z = y^2 - x^2$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

В точке (0,0) частные производные функции равны нулю, однако в этой точке у функции нет экстремума. Данная точка является седловой точкой графика (рис. 12.6).

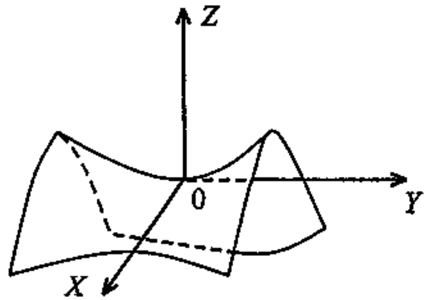


Рис. 12.6

<u>Теорема 12.7.</u> **(достаточное условие экстремума функции).** Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой частные производные равны нулю:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0 y_0)} = 0\,, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0 y_0)} = 0\,;$$

в этой точке функция имеет непрерывные частные производные второго порядка

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0 y_0)} = A\,,\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{(x_0 y_0)} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0 y_0)} = B\,,\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(x_0 y_0)} = C\,.$$

Тогда если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция имеет экстремум, причем если $A < 0$ — максимум, если $A > 0$ — минимум.

В случае $\Delta = AC - B^2 < 0$ функция экстремума не имеет.

Если $\Delta = AC - B = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

12.9. Глобальный максимум

Определение 12.16. Точка (x_0, y_0) называется точкой абсолютного (глобального) максимума (минимума) на множестве $A \in R^2$, если значение функции в этой точке больше (меньше) значения функции в любой точке множества A.

Теорема 12.8. **(теорема Вейерштрасса).** Если функция многих переменных непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она достигает на нем своего глобального максимума и глобального минимума.

Если множество ограничено и замкнуто, то глобальные максимум и минимум непрерывной функции расположены либо в точках границы множества, либо в стационарных точках функции.

12.10. Построение эмпирических формул методом наименьших квадратов

Имеются две переменные x и y и таблица эмпирических значений этих переменных (рис. 12.7, табл. 12.1).

Таблица 12.1

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

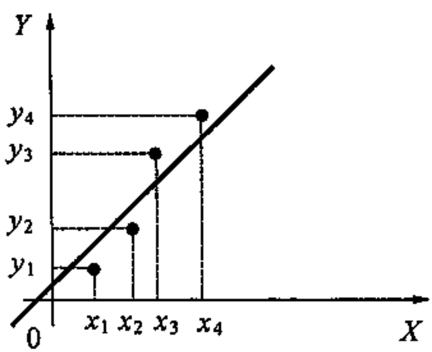


Рис. 12.7

Известно, что зависимость между переменными y и x близка к линейной. Требуется найти теоретическую функциональную зависимость между y и x. Будем искать эту зависимость в виде линейной функции $y = kx + b$.

Подставляя значения переменной x из таблицы в уравнение $y = kx + b$, найдем теоретические значения переменной y. Составим разности между теоретическими и эмпирическими значениями переменной y.

$$y_{1T} = kx_1 + b, \qquad kx_1 + b - y_1 = \varepsilon_1,$$
$$y_{2T} = kx_2 + b, \qquad kx_2 + b - y_2 = \varepsilon_2,$$
$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$
$$y_{nT} = kx_n + b. \qquad kx_n + b - y_n = \varepsilon_n.$$

Величины $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ называются погрешностями. Подберем параметры прямой так, чтобы она проходила как можно ближе ко всем точкам одновременно. Для этого найдем сумму квадратов погрешностей $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$ и выберем k и b так, чтобы эта сумма была минимальной. Выразим суммарную погрешность:

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(kx_i + b - y_i)^2 .$$

Рассмотрим функцию $u(k,b)=\sum_{i=1}^{n}(kx_i+b-y_i)^2$.

Найдем частные производные этой функции и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial u}{\partial k}=\sum_{i=1}^{n}2(kx_i+b-y_i)x_i=2\sum_{i=1}^{n}(kx_i^2+bx_i-x_iy_i)=$$

$$2(\sum_{i=1}^{n}kx_i^2+\sum_{i=1}^{n} bx_i-\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)=2(k\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i).$$

$$\frac{\partial u}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(kx_i+b-y_i)=2(\sum_{i=1}^{n}kx_i+\sum_{i=1}^{n}b-\sum_{i=1}^{n}y_i)=2(k\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n-\sum_{i=1}^{n}y_i).$$

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n}x_i+bn-\sum_{i=1}^{n}y_i=0, \\ k\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0. \end{cases}$$

Получена система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными k и b. Данная система называется нормальной системой метода наименьших квадратов.

Уравнение $y = kx + b$ называется *уравнвнием линейной регрессии*.

Пример 12.7. В таблице 12.2 приведены эмпирические значения двух переменных X и Y. В этой же таблице рассчитаем значения величин XY и X^2. В последнем столбце найдем суммы этих величин.

Таблица 12.2

	Значения				Σ
Y	1	3	2	4	10
X	–2	1	3	4	6
X^2	4	1	9	16	30
XY	–2	3	6	16	23

$$\begin{cases} 6k+4b=10, \\ 30k+6b=23 \end{cases}$$ — нормальная система метода наименьших квадратов.

Решим ее.

$$\begin{cases} b=\dfrac{27}{14}, \\ k=\dfrac{8}{21}. \end{cases} \qquad y=\frac{8}{21}x+\frac{27}{14}$$ — уравнение линейной регрессии.

Построим на одном чертеже эмпирические точки и теоретическую линию (рис. 12.8).

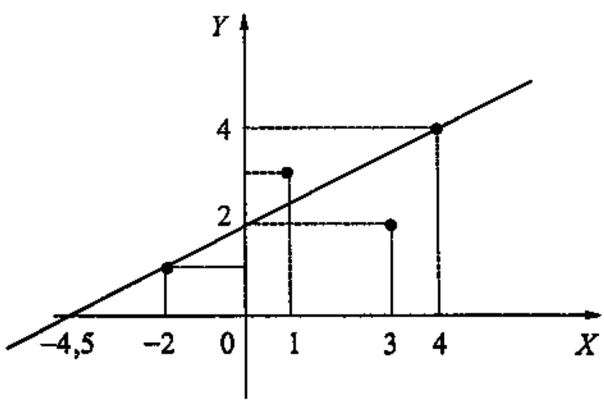


Рис. 12.8

12.11. Применение функций нескольких переменных в экономике

12.11.1. Прибыль от производства товаров разных видов

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — количество производимых m разновидностей товара, а их цены, соответственно, — $P_1, P_2, \ldots, P_m$ (все P_i — постоянные величины). Пусть затраты на производство этих товаров задаются функцией издержек

$$C = S(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Тогда функция прибыли имеет вид

$$П = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_m x_m - S(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Максимум прибыли будем искать как условие локального экстремума функции многих переменных при $x_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots m$:

$$\frac{\partial П}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x_i

$$P_i - \frac{\partial S}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара. Решениями этой системы уравнений являются m-мерные точки.

Пример 12.8. Пусть производится два вида товаров, обозначим их количества через x и y. Пусть цены на эти товары, соответственно, $P_1 = 8$ и $P_2 = 10$, а функция затрат $C = x^2 + xy + y^2$. Найти максимум прибыли. Прибыль выражается функцией

$$П(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Условия локального экстремума приводят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10, \end{cases}$$

решение которой определяет точку (2, 4). Поскольку

$$\Delta = AC - B = 3 > 0,\ A = -2 < 0,$$

то найденная точка определяет локальный максимум функции прибыли, который равен $\Pi_{\max} = 28$.

12.11.2. Оптимальное распределение ресурсов

Рассмотрим задачу оптимального распределения ресурсов на примере функции выпуска $u = a_0 x y^2$ при допущении, что функция затрат на ресурсы x и y линейна, т.е. имеет вид $u = P_1 x + P_2 y$, где P_1 и P_2 — соответствующие цены на эти факторы (рис. 12.9).

В точке (x_0, y_0) оптимального распределения ресурсов линии уровня функций выпуска и затрат касаются.

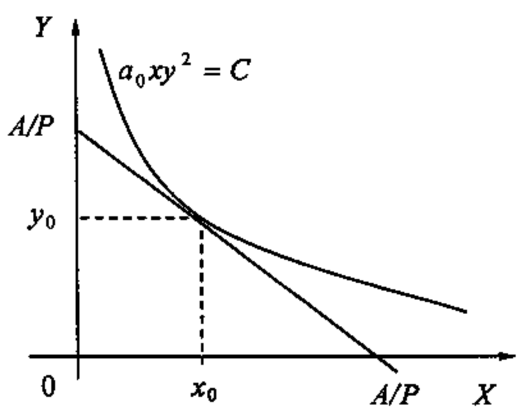


Рис. 12.9

Эти линии определяются, соответственно, уравнениями:

$$a_0xy^2 = C, \quad P_1x + P_2x = A \text{ или } y = (b/x)^{1/2}, \quad y = -(P_1/P_2)x + A/P_2,$$

где $C > 0$ и $A > 0$ — постоянные числа, $b = C/a_0$. Условие касания этих линий определяется уравнением

$$\left[(b/x)^{1/2}\right]'\Big|_{x_0} = -P_1/P_2 .$$

$$1/2\left[(b/x)^{-1/2}\left(-b/x^2\right)\right]\Big|_{x_0} = -P_1/P_2 .$$

Из этого уравнения находится значение $x_0 = b^{1/3}\left[P_2/(2P_1)\right]^{2/3}$. Тогда из уравнения линии уровня функции выпуска определяется значение $y_0 = (b/x_0)^{1/2} = b^{1/3}(2P_1/P_2)^{1/3}$. Отсюда получаем, что оптимальное распределение ресурсов x_0/y_0 должно быть произведено в отношении $P_2 : 2P_1$.

12.11.3. Оптимизация спроса

Задачей исследования спроса является оптимизация функции полезности при ограничениях на бюджет покупателя. Рассмотрим пример: найти величины спроса x и y на две разновидности товара при ценах на них, соответственно, a и b, если потребитель при бюджете K стремится максимизировать функцию полезности, которая имеет вид

$$F(x,y) = x^{\frac{a}{a+b+1}} y^{\frac{b}{a+b+1}} .$$

Из условия задачи следует, что на покупку, стоимость которой $ax + by$, потребитель может израсходовать сумму, не превышающую K. Следовательно, необходимо найти точку (x, y), в которой функция полезности достигает максимума при ограиничениях:

$$ax + by \le K, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0 . \qquad (12.1)$$

Ограничения (12.1) задают на плоскости OXY замкнутую область D в виде треугольника (рис. 12.10), в которой следует искать точку максимума функции $F(x,y)$.

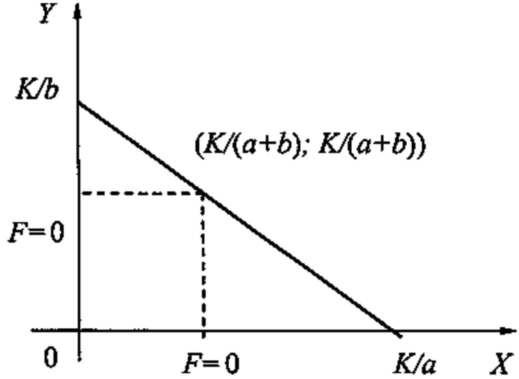


Рис. 12.10

Вычислив частные производные функции полезности, находим, что единственная критическая точка (0, 0) находится на границе области D; и в ней, как и на граничных линиях $x = 0$ и $y = 0$, функция $F(x, y) = 0$, что является минимальным ее значением. Следовательно, нужно искать точку максимума этой функции на границе

$$ax + by = K$$

области D. Подставляя из этого уравнения выражение для y в функцию $F(x, y)$, получаем функцию одной переменной

$$f(x) = b^{-\frac{b}{a+b+1}} x^{\frac{a}{a+b+1}} (K - ax)^{\frac{b}{a+b+1}}.$$

Критическую точку этой функции найдем из условия обращения в нуль ее первой производной; получаем, что $x = K/(a + b)$, откуда $y = K/(a + b)$. Таким образом, в данной модели оптимальный спрос на оба вида товаров одинаков: он пропорционален бюджету и обратно пропорционален суммарной цене товара.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Контрольные вопросы

1. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Предел функции.
2. Бесконечные пределы. Односторонние пределы.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Их свойства.
4. Сравнение бесконечно малых функций.
5. Основные теоремы о пределах.
6. Признаки существования предела.
7. Замечательные пределы. Непрерывные проценты.
8. Непрерывность функции. Непрерывность производственных функций.
9. Свойства функций, непрерывных на множестве.
10. Точки разрыва функции.
11. Производная.
12. Геометрический смысл производной.
13. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
14. Свойства производных.
15. Дифференциал. Связь между производной и дифференциалом.
16. Дифференциал независимой переменной.
17. Геометрический смысл дифференциала.
18. Свойства дифференциала.
19. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
20. Производные высших порядков. Правило Лопиталя.
21. Возрастание и убывание функций.
22. Экстремумы функции.
23. Выпуклость графика функции. Точки перегиба графика.
24. Асимптоты графика функции.
25. Применение понятия производной в экономике.
26. Первообразная. Неопределенный интеграл.
27. Свойства неопределенного интеграла.
28. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
29. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
30. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование дробно-линейных иррациональных функций.

31. Интегрирование тригонометрических выражений.
32. Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла.
33. Свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла.
34. Интегрирование по частям и метод замены переменной в определенном интеграле.
35. Приложения определенного интеграла.
36. Приближенное вычисление определенного интеграла.
37. Несобственные интегралы первого рода.
38. Несобственные интегралы второго рода.
39. Некоторые приложения определенного интеграла в экономике.
40. Понятие о дифференциальном уравнении.
41. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
42. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
43. Числовые ряды. Свойства числовых рядов.
44. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.
45. Знакопеременные ряды. Знакочередующиеся ряды.
46. Степенные ряды.
47. Линейное векторное пространство.
48. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами. Коллинеарные и ортогональные векторы.
49. Системы векторов. Линейная зависимость векторов.
50. Ранг и базис системы векторов. Ранг и базис n-мерного линейного векторного пространства.
51. Матрицы и их виды.
52. Операции над матрицами.
53. Определители.
54. Свойства определителей.
55. Миноры и алгебраические дополнения.
56. Обратная матрица.
57. Элементарные преобразования над матрицей. Нахождение обратной матрицы.
58. Ранг матрицы.
59. Собственные векторы и значения матриц.
60. Системы линейных уравнений. Матричная форма записи системы.
61. Условие совместности.

62. Решение системы с помощью формул Крамера. Решение системы с помощью обратной матрицы.
63. Решение произвольных систем линейных неоднородных уравнений. Метод и таблицы Гаусса.
64. Нахождение неотрицательных базисных решений системы.
65. Однородные системы линейных уравнений.
66. Совместность однородной системы.
67. Общее решение однородной системы.
68. Декартова прямоугольная система координат.
69. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
70. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
71. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
72. Эллипс. Окружность.
73. Гипербола. Парабола.
74. Параллельный перенос системы координат.
75. Поворот системы координат.
76. Уравнение плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
77. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две данные точки.
78. Понятие квадратичной формы.
79. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
80. Евклидово пространство. Выпуклые множества.
81. Решение систем линейных неравенств. Решение систем линейных неравенств с двумя переменными.
82. Представление выпуклого многогранника.
83. Допустимые решения системы линейных уравнений и неравенств.
84. Понятие функции многих переменных.
85. Непрерывность функции многих переменных.
86. Частные производные функции многих переменных.
87. Полный дифференциал.
88. Производная по направлению.
89. Градиент функции многих переменных.

90. Частные производные высших порядков.
91. Экстремумы функций многих переменных. Глобальный максимум.
92. Построение эмпирических формул методом наименьших квадратов.

2. Тематика задач (практические умения и навыки)

1. Вычисление пределов функций и пределов последовательностей.
2. Нахождение производной функции.
3. Применение производной к исследованию функции.
4. Нахождение производных высших порядков от функции.
5. Нахождение дифференциала функции.
6. Нахождение неопределенного интеграла от функции.
7. Нахождение определенного интеграла от функции.
8. Приложения определенного интеграла.
9. Нахождение несобственных интегралов первого и второго рода.
10. Операции над матрицами.
11. Вычисление определителей.
12. Нахождение ранга матрицы и системы векторов.
13. Действия над векторами.
14. Разложение вектора по базису.
15. Решение систем методом Крамера.
16. Решение систем с помощью обратной матрицы.
17. Решение систем методом Гаусса.
18. Нахождение общего, частных, базисных и опорных решений системы.
19. Аналитическая геометрия на плоскости:
    а) прямая;
    б) кривые второго порядка;
    в) преобразование системы координат.
20. Решение систем линейных неравенств.
21. Функции многих переменных:
    а) частные производные, полный дифференциал;
    б) производная по направлению, градиент.

3. Примеры решения задач

Теория пределов

Задача П1.1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+3x+1}$.

Решение. Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю, то можно применить теорему о пределе дроби:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+1)}=\frac{1+2}{1+3+1}=\frac{3}{5}.$$

Задача П1.2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-5x+1}{x^2-6x+5}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределенности преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители. Для значения $x\neq 1$ имеем тождество

$$\frac{4x^2-5x+1}{x^2-6x+5}=\frac{(4x-1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-5)}=\frac{4x-1}{x-5}.$$

Поэтому пределы этих функций равны между собой:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-5x+1}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{4x-1}{x-5}=-\frac{3}{4}.$$

Задача П1.3. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3x-2}-2}$.

Решение. Непосредственная подстановка $x=2$ приводит к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, выделим множитель $x-2$ в числителе и в знаменателе. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряженные, соответственно, числителю и знаменателю:

$$\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3x-2}-2}=\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)(\sqrt{3x-2}+2)}{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{x-1}+1)}=$$

$$=\frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}+2}{3(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{2}{3}.$$

<u>*Задача П1.4.*</u> Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2x-3}$.

<u>*Решение.*</u> Здесь также непосредственно теорему о пределе дроби применить нельзя, так как числитель и знаменатель дроби при $x\to\infty$ не имеют конечных пределов. Это неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия ее разделим числитель и знаменатель на x в высшей степени, т.е. на x^2, и затем перейдем к пределу.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}=3.$$

Здесь $\frac{5}{x};\frac{1}{x^2};\frac{2}{x};\frac{3}{x^2}$ — бесконечно малые функции при $x\to\infty$, и поэтому их пределы равны нулю.

<u>*Задача П1.5.*</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

<u>*Решение.*</u> Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся первым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{x})^2=8\lim_{x\to 0}(\frac{\sin 2x}{2x})^2=8.$$

Можно привести другое решение.

Пусть $2x=\alpha$, тогда $x=\frac{\alpha}{2}$ при $x\to 0, \alpha\to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{a\to 0}\frac{\sin^2\alpha}{\frac{\alpha^2}{4}}=8\lim_{a\to 0}(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2=8.$$

Задача П1.6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$. Для раскрытия этой неопределенности преобразуем функцию так, чтобы можно было воспользоваться вторым замечательным пределом.

$$\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{2x-1+1+3}{2x-1}=\frac{2x-1}{2x-1}+\frac{4}{2x-1}=1+\frac{4}{2x-1}.$$

Введем новую переменную. Пусть $\frac{4}{2x-1}=\alpha$, тогда $x=\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2}$, при $x\to\infty$, $\alpha\to 0$. Следовательно:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x-1})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{2x-1})^x=\lim_{a\to 0}(1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2}}=$$

$$=\lim_{a\to 0}(1+\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}\cdot\lim_{a\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}=e^2.$$

Дифференциальное исчисление

Задача П2.1. Найти производную функции

$$f(x)=2\sqrt[3]{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}+3x\sqrt{x}.$$

Решение. Преобразуем функцию: $f(x)=2x^{\frac{1}{3}}+4x^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}$.

Тогда

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+4\cdot(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}+3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+\frac{9}{2}\sqrt{x}\,.$$

<u>*Задача П2.2.*</u> Найти производную функции

$$f(x)=5\arcsin^3(2x-1)\,.$$

<u>*Решение.*</u> Находим производную сложной функции:

$$f'(x)=5\cdot 3\arcsin^2(2x-1)\cdot\left[\arcsin(2x-1)\right]'=$$

$$=15\arcsin^2(2x-1)\cdot\frac{(2x-1)'}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=$$

$$=\frac{30\arcsin^2(2x-1)}{\sqrt{1-4x^2+4x-1}}=\frac{15\arcsin^2(2x-1)}{\sqrt{x-x^2}}\,.$$

<u>*Задача П2.3.*</u> Найти производную функции $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3x^2+1}{3x^2-1}}$.

<u>*Решение.*</u> Целесообразно сначала прологарифмировать функцию:

$$\ln f(x)=\frac{1}{3}\ln(3x^2+1)-\frac{1}{3}\ln(3x^2-1)\,.$$

Найдем производную от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{3}\frac{(3x^2+1)'}{3x^2+1}-\frac{1}{3}\frac{(3x^2-1)'}{3x^2-1}=\frac{1}{3}\frac{6x}{3x^2+1}-\frac{1}{3}\frac{6x}{3x^2-1}=-\frac{4x}{9x^4-1}=\frac{4x}{1-9x^4}\,.$$

Отсюда

$$f'(x)=f(x)\cdot\frac{4x}{1-9x^4}=\sqrt[3]{\frac{3x^2+1}{3x^2-1}}\cdot\frac{4x}{1-9x^4}\,.$$

<u>*Задача П2.4.*</u> С помощью дифференциала найти приближенное значение выражения $\sqrt[5]{32{,}1}$ с точностью до 0,001.

<u>*Решение.*</u> Используем формулу $f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)$,

где

$$f(x)=\sqrt[5]{x};\ f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}};\ x_0=32;\ x_1=32{,}1;\ f(x_0)=\sqrt[5]{32}=2;$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}}=\frac{1}{80};\ f(x_1)=\sqrt[5]{32{,}1}.$$

Тогда

$$\sqrt[5]{32{,}1}\approx 2+\frac{1}{80}\cdot 0{,}1=2{,}00125\,.$$

Задача П2.5. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $f(x)=x^2/(x-2)$ и построить ее график.

Решение. 1. $y=f(x)$.

1. Функция определена при всех значениях x, кроме $x = 2$, т.е. $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2. Четность. $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x-2}\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x)\,.$

Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция не периодическая.

4. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

Очевидно, если $x = 0$, то $y = 0$, и если $y = 0$, то $x = 0$. Следовательно, график функции проходит через начало координат.

5. Функция непрерывна в области своего определения.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2}{x-2}=-\infty$, то точка $x = 2$ является точкой разрыва второго рода. Исследуем поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2}=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-2}=-\infty\,.$$

6. Найдем ассимптоты графика функции. Известно, что если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции. Если $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-k(x))=b$, то прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции

$y = f(x)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^2}{x-2}=-\infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Найдем

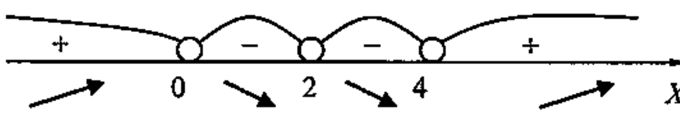
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=1;\ \text{т.е. } k=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2}{x-2}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-2}=2,\ \text{т.е. } b=2.$$

Следовательно, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой графика функции.

2. $y' = f'(x)$.

Найдем промежутки монотонности функции и точки экстремума. Для этого определим $f'(x)$, $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$. Производная обращается в ноль при $x = 0$ и 4, а при $x = 2$ не существует.



При $x\in(-\infty;0)$ $f'(x)>0$, следовательно, на этом интервале функция возрастает.

При $x\in(0;2)$ $f'(x)<0 \Rightarrow$ функция на этом интервале убывает. Следовательно, $x = 0$ является точкой максимума.

$$\max f(x)=f(0)=0.$$

При $x\in(2;4)$ $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ — убывает.

При $x\in(4;\infty)$ $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ — возрастает.

Следовательно, при $x = 4$ функция имеет минимум:

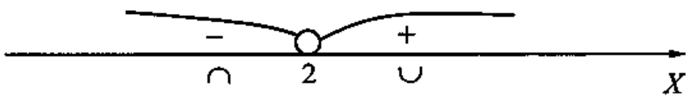
$$\min f(x)=f(4)=8.$$

3. $y'' = f''(x)$.

Определим промежутки выпуклости и вогнутости графика функции. Для этого найдем вторую производную:

$$f''(x)=\frac{8}{(x-2)^3}.$$

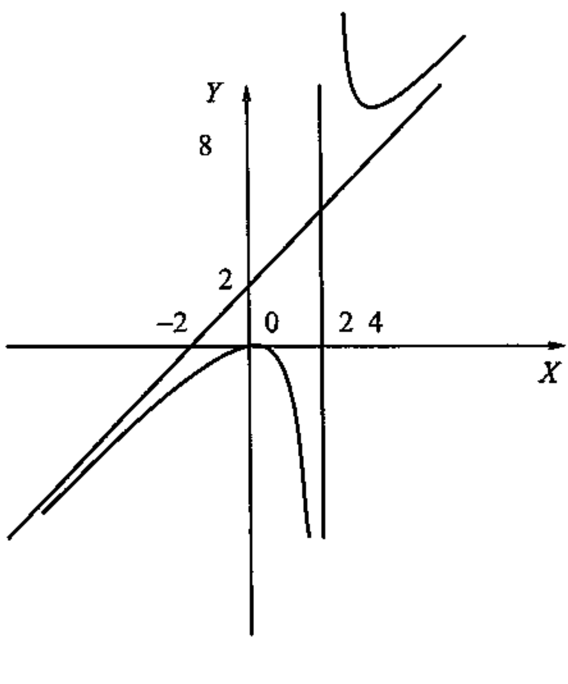
Вторая производная $f''(x)\neq 0$ на области определения и не существует при $x = 2$. Исследуем знак второй производной.



При $x\in(-\infty;2)$ $f''(x)<0$, следовательно, в этом интервале график функции выпуклый.

При $x\in(2;\infty)$ $f''(x)>0 \Rightarrow$ график функции вогнутый. Точек перегиба график функции не имеет.

4. График:



<u>*Задача П3.1.*</u> Найти неопределенный интеграл

$$\int(5x^2+6x+1)dx.$$

<u>*Решение.*</u> Это интеграл от алгебраической суммы функций. Применяя свойства интеграла, получим:

$$\int(5x^2+6x+1)dx=\int 5x^2dx+\int 6xdx+\int dx=5\int x^2dx+6\int xdx+x=$$

$$=5\frac{x^3}{3}+6\frac{x^2}{2}+x+c=\frac{5}{3}x^3+3x^2+x+c.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$d(\frac{5}{3}x^3+3x^2+x+c)=(5x^2+6x+1)dx.$$

<u>*Задача П3.2.*</u> Найти неопределенный интеграл $\int(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx$.

<u>*Решение.*</u> Аналогично предыдущему примеру:

$$\int(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx=2\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{1}{3}}dx=2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+c.$$

Проверка. Продифференцируем полученное выражение:

$$d(4\sqrt{x}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2})=(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx.$$

<u>*Задача П3.3.*</u> Найти неопределенный интеграл $\int \operatorname{tg}^3 2x\frac{dx}{\cos^2 2x}$.

<u>*Решение.*</u> Преобразуем дифференциал.

$$\int \operatorname{tg}^3 2x\frac{dx}{\cos^2 2x}=\frac{1}{2}\int \operatorname{tg}^3 2x d(\operatorname{tg}2x)=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^4 2x}{4}+c=\frac{1}{8}\operatorname{tg}^4 2x+c.$$

<u>*Задача П3.4.*</u> Найти неопределенный интеграл $\int e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Преобразуем дифференциал.

$$\int e^{\arcsin x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int e^{\arcsin x}d(\arcsin x)=e^{\arcsin x}+c\,.$$

Задача П3.5. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{dx}{3x+2}$.

Решение. Преобразуем дифференциал.

$$\int\frac{dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+2)}{3x+2}=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+c\,.$$

Задача П3.6. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{x^2+1}{x-2}dx$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде суммы целой рациональной функции и правильной дроби:

$$\frac{x^2+1}{x-2}=\frac{x^2-4+4+1}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}+\frac{5}{x-2}=x+2+\frac{5}{x-2}\,.$$

Тогда

$$\int\frac{x^2+1}{x-2}dx=\int\left(x+2+\frac{5}{x-2}\right)dx=\int xdx+2\int dx+5\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+5\ln(x+2)+c.$$

Задача П3.7. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{x+3}{x^2+4x+7}dx$.

Решение. Найдем $d\left(x^2+4x+7\right)=(2x+4)dx$. Тогда

$$\int\frac{x+3}{x^2+4x+7}dx=\int\frac{1}{2}\,\frac{2(x+3)}{x^2+4x+7}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4+2}{x^2+4x+7}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx+\int\frac{dx}{x^2+4x+7}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+4x+7\right)}{x^2+4x+7}+\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{2}\ell n\left|x^2+4x+7\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}}+c.$$

Задача П3.8. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{3x+1}}$.

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{3x+1}=t$, тогда $x=\frac{t^3-1}{3}$, $dx=t^2dt$.

Интеграл примет вид $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{3x+1}} = \int \frac{t^2dt}{1+t} = \int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt =$

$$= \int \frac{t^2-1}{1+t}dt + \int \frac{dt}{1+t} = \int (t-1)dt + \ln|1+t| = \frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+1)^2} - \sqrt[3]{3x+1} + \ell n\left|1+\sqrt[3]{3x+1}\right| + c.$$

Задача П3.9. Найти неопределенный интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

Решение. Имеем случай четных степеней, поэтому подынтегральное выражение преобразуем по формулам понижения степеней.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

Задача П3.10. Найти неопределенный интеграл

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx.$$

Решение. Здесь косинус в нечетной степени, поэтому можно свести интеграл к степенному интегралу:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x \left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^2 x d(\sin x) - \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$$

Задача П3.11. Найти неопределенные интеграл

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx.$$

Решение. Используем метод интегрирования по частям.
Обозначим через $u = \operatorname{arctg} x$, тогда $d\upsilon = x\,dx$.

Находим $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ и $\upsilon = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2}$. Тогда

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$$

Задача П3.12. Найти неопределенный интеграл $\int x \cdot \cos 3x\, dx$.

Решение. Используем метод интегрирования по частям.
Положим $u = x$, тогда $d\upsilon = \cos 3x\, dx$.

Находим $du = dx$, $\upsilon = \int \cos 3x\, dx = \dfrac{1}{3}\sin 3x$. Тогда

$$\int x \cos 3x\, dx = \frac{x}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\, dx = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c.$$

Задача П3.13. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{5x+1}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{5x+1} = \frac{1}{5}\ln|5x+1|\Big|_0^1 = \frac{1}{5}\ln 6 - \frac{1}{5}\ln 1 = \frac{1}{5}\ln 6.$$

Задача П3.14. Вычислить определенный интеграл

$$\int\limits_0^1 x \ln(2x+1)\, dx.$$

Решение. Примем за $u=\ln(2x+1)$, тогда $d\upsilon = x\,dx$.

Найдем $du=\dfrac{2dx}{2x+1}$, $\upsilon=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}$. Тогда

$$\int_0^1 x\ln(2x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(2x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\frac{2dx}{2x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-0-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{4x^2-1+1}{2x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{4}\int_0^1(2x-1)\,dx-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{2x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{4}x\Big|_0^1-\frac{1}{8}\ln|2x+1|\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\ln 3=\frac{3}{8}\ln 3.$$

Задача П3.15. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Решение. Пусть $\sqrt{x+1}=t$, тогда $x=t^2-1$, $dx=2tdt$.
Если $x=0$, то $t=\sqrt{0+1}=1$, если $x=3$, то $t=\sqrt{3+1}=2$. Тогда

$$\int_0^3\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\int_1^2\frac{2tdt}{1+t}=2\int_1^2\frac{t+1-1}{1+t}dt=2t\Big|_1^2-2\ln|1+t|\Big|_1^2=2-2\ln\frac{3}{2}.$$

Задача П3.16. Исследовать несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{(x+1)^3}$ на сходимость и найти его значение в случае сходимости.

Решение. Промежуток интегрирования не ограничен, следовательно, это несобственный интеграл первого рода.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^3}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b(x+1)^{-3}d(x+1)=\lim_{b\to\infty}\frac{(x+1)^{-2}}{-2}\Bigg|_1^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{(x+1)^2}\Bigg|_1^b=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(b+1)^2}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}.$$

Несобственный интеграл сходится и равен 1/8.

Задача П3.17. Исследовать несобственный интеграл $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt[5]{x+2}}$ на сходимость и найти его значение в случае сходимости.

Решение. Функция не ограничена на промежутке интегрирования, следовательно, это несобственный интеграл второго рода.

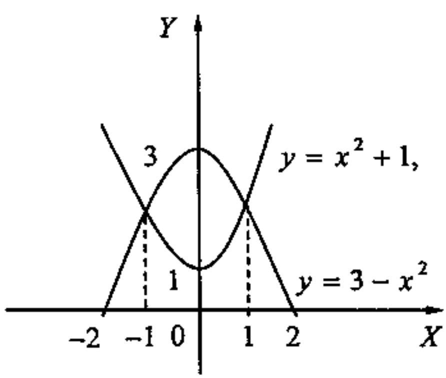
$$\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt[5]{x+2}}=\lim_{\delta\to 0}\int_{-2+\delta}^{0}(x+2)^{-1/5}d(x+2)=\lim_{\delta\to 0}\frac{(x+2)^{4/5}}{4/5}\Bigg|_{-2+\delta}^{0}=$$

$$=\frac{5}{4}\lim_{\delta\to 0}\sqrt[5]{(x+2)^4}\Bigg|_{-2+\delta}^{0}=\frac{5}{4}\lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt[5]{16}-\sqrt[5]{\delta}\right)=\frac{5}{4}(\sqrt[5]{16}-0)=\frac{5}{4}\sqrt[5]{16}.$$

Несобственный интеграл сходится и равен $5/4\cdot\sqrt[5]{16}$.

Задача П3.18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1,\ \ y=3-x^2$.

Решение. Построим данные параболы.



Найдем абсциссы точек пересечения. Для этого решим систему

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 3 - x^2. \end{cases}$$

Получим $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Фигура ограничена графиками двух функций, следовательно, площадь ее находится по формуле

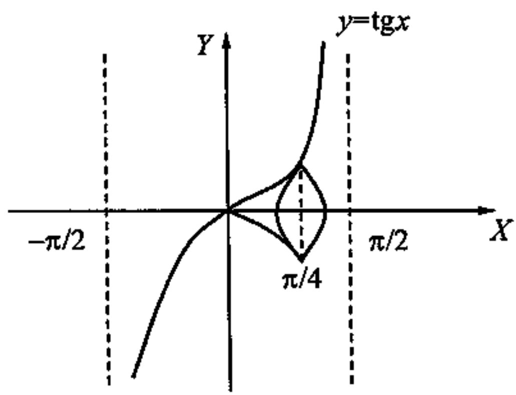
$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$, где $f_1(x) = 3 - x^2, \quad f_2(x) = x^2 + 1$. Тогда

$$S = \int_{-1}^{1} \left[\left(3 - x^2\right) - \left(x^2 + 1\right)\right] dx = 2\int_0^1 \left(2 - 2x^2\right) dx = 4x\Big|_0^1 - 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 4 - \frac{4}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = 2\frac{2}{3}$(кв. ед.).

<u>*Задача П3.19*</u>. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = \operatorname{tg} x; \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}$.

<u>*Решение.*</u> Сделаем чертеж.



Так как вращение фигуры происходит вокруг оси OX, то объем тела определяем по формуле $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$, где $a=0$, $b=\dfrac{\pi}{4}$, $f(x)=\mathrm{tg}x$.

$$V_{\text{т в}}=\pi\int\limits_0^{\pi/4} tg^2 x dx=\pi\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\pi\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\pi\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}-\pi\int\limits_0^{\pi/4}dx=$$

$$=\pi tg\, x\Big|_0^{\pi/4}-\pi x\Big|_0^{\pi/4}=\pi-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi(4-\pi)}{4}.$$

Ответ: $V_{\text{т.в.}}=\dfrac{\pi(4-\pi)}{4}$(куб.ед.).

Дифференциальные уравнения

<u>*Задача П4.1.*</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $x\,y'-y=x^{\,2}e^x$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y_0=0$ при $x_0=1$.

<u>*Решение.*</u> Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Оно приводится к виду $y'+p(x)\cdot y=g(x)$. Для этого поделим обе части этого уравнения на x. Получим $y'-\dfrac{y}{x}=x\cdot e^x$. Общее решение этого уравнения будем искать в виде произведения двух функций $y=u\cdot v$, $\quad y'=u'v+v'u$.

Уравнение примет вид $u'v+uv'-\dfrac{1}{x}uv=xe^x$, или

$$u'v+u(v'-\frac{1}{x}v)=xe^x. \ (*)$$

Решаем в следующем порядке.

1. Функцию v следует взять так, чтобы $v'-\dfrac{1}{x}v=0$.

Решим это уравнение:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}\Rightarrow\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln x=\ln v \text{ или } v=x;$$

2. Найдем функцию u, для этого подставим в уравнение (*) вместо $v=x$.

Получим $u'x = xe^x$, $u' = e^x$; $du = e^x dx \Rightarrow u = e^x + c$.

3. Общее решение исходного уравнения имеет следующий вид:

$$y = x(e^x + c).$$

4. Для того чтобы найти частное решение, удовлетворявшее данным начальным условиям, нужно в общее решение подставить $y_0 = 0$ и $x_0 = 1$. Получим $0 = 1(e + c)$, отсюда $c = -e$.

Итак, частное решение имеет вид $y = x(e^x - e)$.

<u>*Задача П4.2.*</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $2y'' - 7y' + 3 = 0$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = 0$; $y'_0 = 5$ при $x_0 = 0$.

<u>*Решение.*</u> Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение и решим его.

$$2k^2 - 7k + 3 = 0, \quad k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = 3.$$

Тогда общее решение данного уравнения будет иметь вид

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x},$$

$$\text{т.е. } y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}.$$

Найдем частное решение, для этого найдем y'.

$$y' = \frac{1}{2} c_1 e^{\frac{x}{2}} + 3c_2 e^{3x}.$$

Подставим в обшее решение и в его производную данные начальные условия. Получим систему двух уравнений с неизвестными c_1, c_2.

$$\begin{cases} 0 = c_1 e^0 + c_2 e^0, \\ 5 = \dfrac{1}{2} c_1 e^0 + 3c_2 e^0, \end{cases} \text{или}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + 6c_2 = 10. \end{cases}$$

Получим $c_1 = -2$; $c_2 = 2$;. Итак, частное решение имеет вид

$$y = 2e^{3x} - 2e^{\frac{x}{2}}.$$

<u>Задача.</u> Написать три первых члена степенного ряда по заданному общему члену $a_n x^n = \dfrac{2^n x^n}{3^n \sqrt{n}}$, определить интервал сходимости ряда и исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

<u>Решение.</u>

При $n = 1$ получаем $a_1 x = \dfrac{2x}{3}$.

При $n = 2$ получаем $a_2 x = \dfrac{4x^2}{9\sqrt{2}}$.

При $n = 3$ получаем $a_3 x = \dfrac{8x^3}{27\sqrt{3}}$.

Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$$a_n = \frac{2^n}{3^n\sqrt{n}};\ a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}};$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 3^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^n\cdot 2^{n+1}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Ряд сходится при $x \in (-3/2, 3/2)$.

Исследуем поведение ряда при $x = \dfrac{3}{2}$, для этого в степенной ряд вместо x подставим число $\dfrac{3}{2}$. Получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Для того чтобы исследовать его, сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Известно, что гармонический ряд расходится. Так как

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$ при всех n, то из признака сравнения следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ также расходится.

Исследуем поведение ряда при $x = -\dfrac{3}{2}$, для этого в степенной ряд подставим $x = -\dfrac{3}{2}$. Получим числовой знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \sqrt{n}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Применим к нему признак Лейбница. Так как члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то данный ряд сходится.

Итак, степенной ряд сходится при $x \in [-3/2, 3/2)$.

Функции многих переменных

Задача. Дана функция $z(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$, точка $A(0,-1)$ и вектор $\bar{l} = (4,-3)$. Найти полный дифференциал функции, градиент функции в точке A и производную функции $z(x, y)$ по направлению $\bar{l}$ в точке A.

Решение. Найдем частные производные функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y.$$

2. Полный дифференциал имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4x + 3y)dx + (3x + 2y)dy.$$

3. Градиент функции в точке A:

$$\operatorname{grad} z\Big|_A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big|_A = (4x+3y, 3x+2y)\Big|_{(0,-1)} = (-3,-2).$$

4. Найдем направляющие косинусы направления $\bar{l}$.

$$|\bar{l}| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5,\ \cos\alpha = \frac{4}{5},\ \cos\beta = -\frac{3}{5}.$$

Производная функции в данном направлении имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \frac{4}{5}(4x+3y) - \frac{3}{5}(3x+2y).$$

Производная функции в данном направлении в точке A равна

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_A = \frac{4}{5}(-3) - \frac{3}{5}(-2) = -\frac{6}{5}.$$

Линейная алгебра

Задача П4.1. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричной форме $A\bar{x} = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу к матрице A. Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем ее левую часть к единичной матрице.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&-1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right).$$

Возьмем третью строку. Сложим ее со второй строкой и сложим с первой строкой, умножив на (–3).

$$\overline{A}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&0&-3\\2&0&0&0&1&1\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

умножим первую строку на (–1):

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&0&3\\2&0&0&0&1&1\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

возьмем первую строку. Умножим ее на (–2), сложим со второй строкой и сложим с третьей строкой, умножив первую строку на (–1):

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&0&3\\0&0&4&2&1&-5\\0&1&1&1&0&-2\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

разделим вторую строку на (4)

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-1&0&3\\0&0&1&2/4&1/4&-5/4\\0&1&1&1&0&-2\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

возьмем вторую строку. Умножим ее на 2 и сложим с первой строкой и сложим с третьей строкой, умножив вторую строку на (–1):

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&2/4&2/4\\0&0&1&2/4&1/4&-5/4\\0&1&0&2/4&-1/4&-3/4\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

переставим две последние строки:

$$\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&2/4&2/4\\0&1&0&2/4&-1/4&-3/4\\0&0&1&2/4&1/4&-5/4\end{array}\right).$$

В левой части расширенной матрицы получена единичная матрица, следовательно, в правой части получена обратная матрица.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы.

$$\bar{x} = A^{-1}B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0+4+0 \\ 10-2+0 \\ 10+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Задача П4.2. Даны две системы векторов:

$\bar{a}_1(6,1,2)$, $\bar{a}_2(-1,2,1)$, $\bar{a}_3(3,-1,1)$;

$\bar{b}_1(1,2,-3)$, $\bar{b}_2(-1,0,5)$, $\bar{b}_3(0,2,2)$.

Найти ранги данных систем и выяснить, какая из них образует базис. Найти координаты вектора $\bar{c}\,(8,2,4)$ в этом базисе с помощью формул Крамера.

Решение. Составим матрицу из координат векторов первой системы и найдем ее ранг. Для этого приведем ее к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

переставим первые две строки

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

умножим первую строку на 6 и сложим со второй, умножим первую строку на 3 и сложим с третьей строкой

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 13 & 8\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

разделим вторую строку на 13

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 8/13\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

умножим вторую строку на (–5) и сложим с третьей

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 8/13\\ 0 & 0 & 12/13\end{pmatrix}.$$

Ранг системы векторов равен 3. Векторы линейно независимы и поскольку их три и они трехмерные, то они образуют базис в трехмерном пространстве. Любой вектор пространства можно разложить по векторам этой системы.

$$\overline{c}=c_1\overline{a}_1+c_2\overline{a}_2+c_3\overline{a}_3\,.$$

Найдем координаты разложения. Подставим координаты векторов в последнее равенство.

$$(8,2,4)=c_1(6,1,2)+c_2(-1,2,1)+c_3(3,-1,1),$$
$$(8,2,4)=(6c_1-c_2+3c_3\,,\,c_1+2c_2-c_3\,,\,2c_1+c_2+c_3).$$

Так как векторы равны, то равны их координаты.

$$\begin{cases}6c_1 & -c_2 & +3c_3 & = & 8,\\ c_1 & +2c_2 & -c_3 & = & 2,\\ 2c_1 & +c_2 & +c_3 & = & 4.\end{cases}$$

Получена система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решим ее методом Крамера. Найдем главный определитель системы.

$$\Delta=\begin{vmatrix}6 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=12+3+2-12+6+1=12\neq 0\,.$$

Система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители. Они получаются из главного определителя заменой соответствующего столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 6 + 4 - 24 + 8 + 2 = 12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 12 - 16 - 12 + 24 - 8 = 12,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 4 + 8 - 32 - 12 + 4 = 12.$$

Выпишем решение системы.

$$\begin{cases} c_1 = \Delta_1 / \Delta = 1, \\ c_2 = \Delta_2 / \Delta = 1, \\ c_3 = \Delta_3 / \Delta = 1. \end{cases}$$

Разложение вектора $\bar{c}$ (8, 2, 4) в данном базисе имеет вид

$$\bar{c} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3.$$

Найдем ранг второй системы векторов. Составим матрицу из координат векторов и приведем ее к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

прибавим первую строку ко второй

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

умножим вторую строку на (–1) и сложим с третьей

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы векторов равен 2. Векторы линейно зависимы и они не образуют базиса в трехмерном пространстве.

Задача П4.3. Найти базисное неотрицательное решение системы

$$\begin{cases} 6x_1 & +x_2 & -2x_3 & -2x_4 & +x_5 & = & 5, \\ 6x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 8, \\ & -x_2 & +3x_3 & +3x_4 & & = & -2 \end{cases}$$

и сделать переход к другому неотрицательному базисному решению. Выписать общее решение системы.

Решение. 1. Заполняем исходную таблицу. Умножаем третье уравнение на (–1).

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
1		6	1	–2	–2	1	5
2		6	1	2	1	2	8
3		0	1	–3	–3	0	2

2. Выбираем ключевой столбец, например второй, т.е. вводим в базис переменную x_2.

3. Выбираем ключевую строку, для этого найдем

$$\min\left\{\frac{5}{1};\frac{8}{1};\frac{2}{1}\right\}=\frac{2}{1},$$

следовательно, третья строка будет ключевой.

Заполняем вторую таблицу.

1. Ключевую строку делим на ключевой элемент, равный единице, следовательно, строка перепишется без изменения.

2. Ключевой столбец заполняем нулями.

3. В ключевой строке были нулевые элементы, следовательно, первый и пятый столбцы переписываются без изменения.

4. Остальные элементы вычисляются по правилу прямоугольника:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
1		6	0	1	1	1	3
2		6	0	5	4	2	6
3	x_2	0	1	–3	–3	0	2

Возьмем пятый столбец ключевым, т.е. введем в базис переменную x_5, тогда $\min\left\{\frac{3}{1};\frac{6}{2}\right\}=3$, любую из этих двух строк можно брать ключевой, например, первую.

Заполняем третью таблицу:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
1	x_5	6	0	1	1	1	3
2		–6	0	3	2	0	0
3	x_2	0	1	–3	–3	0	2

Введем в базис переменную x_4, тогда $\min\left\{\frac{3}{1};\frac{0}{2}\right\}=0$, т.е. ключевой строкой будет вторая строка.

Заполняем четвертую таблицу.

1. Ключевую строку делим на 2.
2. Ключевой столбец заполняем нулями.
3. Перепишем без изменения второй, пятый и последний столбцы.
4. Остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
1	x_5	9	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
2	x_4	–3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	0
3	x_2	–9	1	$\frac{3}{2}$	0	0	2

Система приведена к единичному базису. Выпишем общее решение системы.

$$\begin{cases} 9x_1 & & -1/2x_3 & & +x_5 & = & 3, \\ -3x_1 & & +3/2x_3 & +x_4 & & = & 0, \\ -9x_1 & +x_2 & +3/2x_3 & & & = & 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 3 - 9x_1 + 1/2x_3, \\ x_4 = 3x_1 - 3/2x_3, \\ x_2 = 2 + 9x_1 - 3/2x_3. \end{cases}$$

Выпишем из таблицы опорное решение $\overline{X}_{1оп} = \{0;2;0;0;3\}$. Найдем второе опорное решение, для этого введем в базис одну из свободных переменных, например x_1. Ключевой строкой будет первая строка, так как в столбце единственный положительный элемент — 9.

Заполняем пятую таблицу:

№	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
1	x_1	1	0	$-\frac{1}{18}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	x_4	0	0	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	1
3	x_2	0	1	1	0	1	5

Выпишем из таблицы второе опорное решение $\overline{X}_{2оп} = \left\{\frac{1}{3}; 5; 0; 1; 0\right\}$.

Задача П4.4. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы. Составим характеристическое уравнение для матрицы A.

$$|A - \lambda E| = 0,$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0,$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5-\lambda)(3-\lambda)-8=0,$$

$$\lambda^2-8\lambda+7=0,$$

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=7.$$

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Для этого решим векторное уравнение $A\overline{x}=\lambda\,\overline{x}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5x_1+2x_2 \\ 4x_1+3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Так как эти векторы равны, то равны их координаты.

$$\begin{cases} 5x_1 & +2x_2 & = & x_1, \\ 4x_1 & +3x_2 & = & x_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 & +2x_2 & = & 0, \\ 4x_1 & +2x_2 & = & 0. \end{cases}$$

Оба эти уравнения эквивалентны уравнению

$$2x_1+x_2=0.$$

Возьмем $x_1 = c$, тогда $x_2 = -2c$. Таким образом, получен собственный вектор, $\overline{x}_1=(c,-2c)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$.

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 7$. Для этого решим векторное уравнение $A\overline{x}=\lambda\,\overline{x}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 7\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5x_1+2x_2 \\ 4x_1+3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \end{pmatrix}.$$

Так как эти векторы равны, то равны их координаты.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7x_1, \\ 4x_1 + 3x_2 = 7x_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Оба эти уравнения эквивалентны уравнению

$$x_1 - x_2 = 0 .$$

Возьмем $x_2 = c$, тогда $x_1 = c$. Таким образом, получен собственный вектор $\overline{x}_2 = (c, c)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 7$.

Аналитическая геометрия

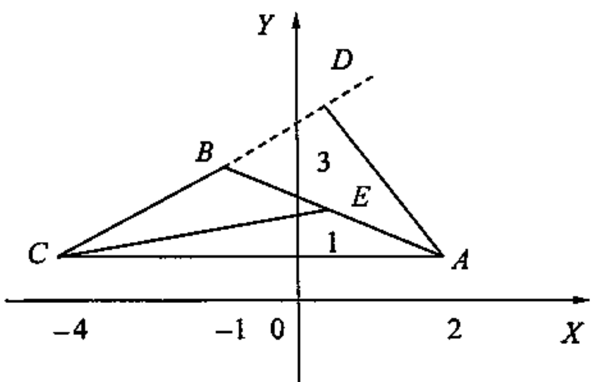
Задача П5.1.

Дан треугольник ABC: $A(2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-4,1)$.

Найти:

уравнение и длину высоты AD; уравнение и длину медианы CE; внутренний угол B; систему линейных неравенств, определяющую треугольник. Сделать чертеж.

Решение. Сделаем чертеж.



1. Составим уравнения всех сторон треугольника, используя уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

AB: $\dfrac{x-2}{-1-2}=\dfrac{y-1}{3-1}$, $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-1}{2}$, $2x-4=-3y+3$, $3y=-2x+7$,

AB: $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{3}$.

BC: $\dfrac{x+1}{-4+1}=\dfrac{y-3}{1-3}$, $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-3}{-2}$, $-2x-2=-3y+9$, $3y=2x+11$,

BC: $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}$.

Так как точки А и С имеют одинаковую ординату, используем данное уравнение в преобразованном виде:

$$(x-x_1)(y_2-y_1)=(y-y_1)(x_2-x_1).$$

AC: $(x-2)(1-1)=(y-1)(-4-2)$, $(y-1)(-6)=0$,

AC: $y=1$.

2. Найдем длину высоты AD. Используем формулу расстояния от точки до прямой:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Приведем уравнение BC к общему уравнению прямой.

$$BC:\ y=\frac{2}{3}x+\frac{11}{3},\quad 2x-3y+11=0.$$

$$AD=\frac{|2\cdot 2-3\cdot 1+11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{12}{\sqrt{13}}.$$

3. Составим уравнение высоты AD. Она проходит через точку $A(2,1)$ и перпендикулярна прямой BC, $k_{BC}=2/3$. Из условия перпен-

дикулярности $k_{AD} = -1/k_{BC} = -3/2$. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

$$AD:\quad y-1=-\frac{3}{2}(x-2),\quad y=-\frac{3}{2}x+4.$$

4. Для нахождения длины и уравнения медианы CE найдем координаты точки E как середины отрезка AB.

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2};\quad y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2.$$ Точка E (1/2,2).

$$CE=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1/2+4)^2+(2-1)^2}=\sqrt{81/4+1}=\sqrt{85}/2.$$

$$CE:\ \frac{x+4}{1/2+4}=\frac{y-1}{2-1},\ \frac{x+4}{9/2}=\frac{y-1}{1},\ 2x+8=9y-9,$$

$$CE:\ y=\frac{2}{9}x+\frac{17}{9}.$$

5. Найдем внутренний угол B. Он отсчитывается в положительном направлении от прямой ВС к прямой AB. $k_{BC} = 2/3$, $k_{AB} = -2/3$.

$$\operatorname{tg}\angle B=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{-2/3-2/3}{1-4/9}=\frac{-4/3}{5/9}=-\frac{12}{5},$$

$$\angle B=\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right).$$

6. Составим систему линейных неравенств, определяющую треугольник. Запишем уравнения сторон в виде

$$AB:\ 2x+3y=7,$$

$$BC:\ 2x-3y=-11,$$

$$AC:\ y=1.$$

Подставим точку с координатами (–1, 2), лежащую внутри треугольника, в левые части равенств.

$$2x+3y=-2+6=4<7,$$

$$2x-3y=-2-6=-8>-11,$$

$$y=2>1.$$

Следовательно, система неравенств, описывающая треугольник, имеет вид

$$\begin{cases} 2x & +3y & \le & 7, \\ 2x & -3y & \ge & -11, \\ & y & \ge & 1. \end{cases}$$

<u>*Задача П5.2.*</u> Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что ее эксцентриситет равен 1,25 и гипербола проходит через точку $A(8{,}3\sqrt{3})$.

<u>*Решение.*</u> Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Так как гипербола проходит через точку A (8; $3\sqrt{3}$), то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, т.е. $\frac{64}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1$. Так, как ε = 1,25, то $\frac{c}{a}$ = 1,25, но $c^2=a^2+b^2$, тогда c^2 = 1,5625 a^2 или $a^2+b^2=1{,}5625a^2$.

Итак, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b.

$$\begin{cases} \frac{64}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1, \\ b^2=0{,}5625a^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим a^2 = 16 и b^2 = 9, следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

<u>*Задача П5.3.*</u> Составить уравнение прямой, проходящей через вершину параболы $y=x^2-4x+7$ и центр окружности $x^2+y^2+4x-2y-4=0$.

<u>Решение.</u> Найдем координаты вершины параболы и координаты центра окружности. Для этого выделим полные квадраты по каждой переменной.

Уравнение параболы: $(x-2)^2 = y-3$;

уравнение окружности: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Следовательно, вершина параболы имеет координаты B (2;3), а центр окружности имеет координаты C (–2; 1).

Тогда уравнение искомой прямой составим по формуле

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Получим $\dfrac{y-3}{1-3} = \dfrac{x-2}{-2-2}$, или $x-2y+4=0$.

Библиографический список

1. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. : Изд-во физ.-мат. лит., 1962.
2. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 1. М. : Наука, 1971.
3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М. : Наука, 1973.
4. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Ч. 1. М. : Изд-во МГУ, 1987.
5. *Калихман И.Л.* Линейная алгебра и программирование. М. : Высш. шк., 1967.
6. *Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И.* Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. 1. М.: Высш. шк., 1982.
7. *Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И.* Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. 2. М. : Высш. шк., 1982.
8. *Карпелевич Ф.И., Садовский В.Е.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования. М. : Наука, 1965.
9. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей. М. : ИНФРА-М, 1999.
10. *Кремер Н.Ш. и др.* Высшая математика для экономистов. М. : ЮНИТИ, 1997.
11. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. М. : Наука, 1975.
12. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М. : Гос. изд.-во технико-теорет. лит., 1953.
13. *Мэнкью Н.Г.* Макроэкономика. М. : Изд-во МГУ, 1994.
14. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / под ред. А.И. Карасева и Н.Ш. Кремера. М. : Экон. образование, 1989.
15. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М. : Наука, 1989.
16. *Солодовников А.С.* Введение в линейную алгебру и линейное программирование. М. : Просвещение, 1966.
17. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М. : Изд-во физ.-мат. лит., 1958.
18. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Ч. 1. М. : Физматгиз, 1958.
19. *Холл М.* Комбинаторика. М. : Мир, 1970.
20. *Шипачев В.С.* Высшая математика. М. : Высш. шк., 1985.
21. *Шипачев В.С.* Задачи по высшей математике. М. : Высш. щк., 1996.